Fortsetzung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis endlicher Größen

erste Fortsetzung

von

Carl Christian Langsdorf,

Hochfürstl. Hessen-Homburgischen und Königl. Schwedischen patriotischen Gesellschaften ordentlichem Mitgliede.

Mannheim,

bei C. F. Schwan, Churfürstl. Hofbuchhändler.

1777.

Vorrede

Die vor nunmehro einem Jahre von mir herausgegebenen Erläuterungen über die Kästnerische Analysis endlicher Grössen haben das Schicksaal gehabt, daß die anfänglich dazu bestimmt gewesene Vorrede verschiedener Umstände halber nicht gedruckt wurde; ich muß daher noch hier das, was ich daselbst nothwendig zu erinnern hatte, nachhohlen. Verschiedene Sätze habe ich aus einer von Hr. Professor Kies in Tübingen bekannt gemachten Dissertation genommen, und sie deswegen mit einem (*) bezeichnet; ich habe um so weniger Bedenken getragen, diese Sätze hier mit einzuschalten, als ich nur die Absicht hatte, den ersten Anfängern nützlich zu sein, und dergleichen Dissertationen doch nur in sehr wenige Hände kommen. Ausserdem hatte ich verschiedene Lehren noch ganz übergangen, besonders das Newton. Parallelogramm, weil solches in dem Buche selbst ziemlich ausführlich abgehandelt worden ist; dagegen habe ich aus dem (711.) angeführten Buche verschiedenen Sätzen von den größten und kleinsten ꝛc. daselbst eine Stelle angewiesen, weil diese Lehre überaus wich-

tig ist, und doch denen, die sich mit der Anal. des Unendl. nicht beschäftigen können, sonsten unbekannt bleiben mögte, da die Algebra der Agnesi schon unter die kostbaren und seltenen Schriften gehört. Anfänger werden soviel darin finden, als sie ohne Kenntnis der Analysis des Unendl. zu wissen verlangen können.

Hier habe ich nun noch verschiedene Erläuterungen beigefügt, die ich im vorigen Stück übergangen hatte, z. B. über einige Sätze bei dem Newton. Parallelogr. bei der Auflössung der cubischen Gleichungen 2c. besonders habe ich bei der Lehre von den Combinationen zugleich die Anwendung auf das Lottospiel gezeigt, und dabei gewiesen, wie sich die Einrichtung desselben durch die Lehre von den Combinationen verbessern lasse. Ausserdem habe ich noch verschiedene Anwendungen der Lehre von geometrischen Progreßionen beigebracht, besonders in Rücksicht auf gewisse Rechtsfälle, ob ich mich gleich in das eigentlich juristische nicht weiter, als es mir zur Ausführung des übrigen nothwendig schiene, eingelassen habe. Dahin gehört die Berechnung bei dem antichretischen Vertrag, welcher eigentlich nur ein besonderer Fall von der Berechnung des Interusuriums ist, die hier gleichfalls besonders beigefügt worden ist. Und ob man gleich eine Menge von Aufsätzen, und besonders in Polacks Mathesi forensi eine sehr weitläuftige Abhandlung davon antrift, so glau-

be

be ich doch hier in der Kürze und durch die einzige Formel

$$a=p\left((m+1)-\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).e^{q+m}}\right)$$

die Sache weit vollständiger und leichter vorgetragen zu haben, als a. a. O. auf vielen Bogen geschehen ist, die ohnehin nur die Geduld des Lesers und zumal des Anfängers ermüden. Die Berechnung der Quartá Faleidiá bei einem annuo Legato ist eine wichtige und ziemlich schwierige Anwendung der Interusurienrechnung; sie ist deswegen hier gleichfalls abgehandelt worden, und ich habe folgende allgemeine Gleichung für den größten möglichen Werth eines annui Legati, womit ein Testator seinen Erben beschweren darf, gefunden:

$$\lambda=\frac{3h}{4.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1)e^{q+m}}-1\right)}$$

Man wird aber finden, daß ich hier in Bestimmung des Werths von m nicht mit andern einerlei Meinung bin, die ihn nicht nach dem l. 168. ff. ad l. Falc. sondern nach den Süßmilchischen Tabellen bestimmen. Ueberhaupt wären wir nicht einmal berechtigt, einen an sich doch ganz ungewissen Werth von m anzunehmen, wenn uns nicht cit. l. solches verstattete; nehmen wir also in soweit dieses Gesetz an, so müssen wir auch die darinn bestimmten Werthe von m

bei-

beibehalten, ohne zu untersuchen, ob sie auch der Natur angemessen seien, oder nicht? Mehrere Anwendungen z. B. auf Leibrenten, Wittwencassen u. s. w. mogte ich hier nicht beibringen, weil ich nicht Lust hatte, die fürtrefliche Schriften darüber, die sich ohnehin schon in Jedermanns Händen befinden, aufs Neue abzuschreiben, und mich von Phaedro belachen zu lassen:

Pennas, pauoni quae deciderant, sustulit, seque exornauit.

Ich ergreife übrigens diese öffentliche Gelegenheit, die mir bei dem vorigen Stück zu meinem Verdruß geraubt wurde, dem Herrn Hofrath Kästner, dem es eigen ist, den gewöhnlichen Stolz des Lehrers zu verläugnen, für sein ausserordentlich gütiges Betragen gegen mich gehorsamsten Dank abzustatten. Als meinen Lehrer werde ich Ihn ewig zu verehren, und als einen grossen Mann zu bewundern wissen.

Auch statte ich dem mir unbekannten Leipziger Hrn. Recensenten für die unerwartete gütige Beurtheilung des vorigen Stücks den verbindlichsten Dank ab. Ich würde mich überlohnt finden, wenn diese wenige Blätter gleichen Beifall erhielten.

Darmstadt
den 1sten Mai 1777.

C. C. Langsdorf.

Anwen=

Anwendung der Lehre von den geometrischen Progressionen

I.

Bei dem antichretischen Vertrag.

1.

Wenn Jemand ein Capital a aufnimmt, und giebt ein nutzbares Pfand p (*) unter der Bedingung dagegen, daß der Creditor die Früchte, die er daraus zieht, nach und nach an dem Capital a und dessen Zinsen abrechnen soll, so heißt der Vertrag, den hier der Creditor mit dem Debitor eingeht, ein antichretischer Vertrag (pactum antichreticum).

2. Es

(*) Wo p den Werth des Pfands vorstellt, dessen Zinsen nach gewöhnlichem p. c. oder so, wie vom Capital a gerechnet, den Werth vom jährigen Betrag des Pfands ausmachen.

2. Es lassen sich hier zwo Arten der Berechnung gedenken. Setzt man nämlich den jährigen Ertrag des Pfandes einmal für allemal einer beständigen Grösse gleich, z. E. $\frac{1}{b}$ des Pfandes, so trägt das Pfand in n Jahren n. $\frac{p}{b}$, und das Capital a bringt Zinsen n. $\frac{a}{b}$, daß also dieß nach n Jahren $= a + n \frac{a}{b}$ ist, wenn man gar nicht auf Zinsen von Zinsen rechnet; soll also nach n. Jahren das Capital durch die Antichresin erlöschen, so wäre die dieser Rechnung angemeßene Formel

$$a + n \frac{a}{b} - n \frac{p}{b} = 0,$$

oder

$$a + \frac{n.(a - p)}{b} = 0,$$

oder

$$ab - n(p - a) = 0,$$

also

$$n = \frac{a\ b}{p-a}$$

d. h. die Zahl, mit der man das Capital dividiren muß, um die jährigen Zinsen zu erhalten (b),

(b), multiplicire man mit dem geliehenen Capital (a), und dividire das Produkt durch die Differenz, welche herauskommt, wann man das geliehene Capital (a.) von dem reducirten Werth des Pfandes (p.) abzieht; so erhält man zum Quotienten die Anzahl von Jahren, nach deren Verlauf das Capital (a) völlig erloschen, und also das Pfand wieder herausgegeben werden muß.

Ex. Es nimmt einer ein Capital von 1000 Thl. zu 5 p. c. auf, und giebt dagegen ein Pfand, das jährlich 80 Thl. erträgt, man sucht die Anzahl von Jahren, nach deren Verlauf der Creditor das Pfand wieder herausgeben muß.

Aufl. Hier ist die Zahl, durch die man die 1000 Thl. dividiren muß, um die jährige Zinsen zu erhalten, weil sie 5 p. c. betragen sollen, = 20, dieß multipl. mit dem Capital = 1000 Thl. giebt zum Produkt 20000 Thl. Nun trägt das Pfand jährlich 80 Thl. Diese als Zinsen zu 5 p. c. angesehen geben ein Capital = 20. 80 = 1600 Thl. welches also der reducirte Werth des Pfands ist; hiervon das geliehene Capital von 1000 Thl. abgezogen, läßt 600 Thl. womit man obiges Produkt von 20000 Thl. dividiren muß, um die gesuchte Anzahl von Jahren zu erhalten; diese ist demnach =

$$\frac{20000}{600} = \frac{200}{6} = 33,33 - -$$

oder $33\frac{1}{3}$ Jahre, also 33 Jahre 4 Monathe. Und diese Rechnung vertheidigen Polack in seiner Mathesi forensi, und Hr. D. Moser in einer unter dem Vorsitz des Herrn Prof. Eisenhards gehaltenen Inauguraldissertation, unter dem Titel: Rationem computationis fructuum ex pacto antichretico perceptorum in foro receptam nec iuri nec aequitati conuenire. Ich bin indessen mit Hrn. D. Moser nicht einerlei Meinung, obgleich seine mit Ruhm ausgeführte Abhandlung große Geschicklichkeit verräth und vielen Beifall erhalten hat.

3. Die zwote Art der Berechnung, als die in foro angenommene, besteht darinn, daß man den jährlichen Ueberschuß der Früchte über die Zinsen des Capitals a am Ende eines ieden Jahrs vom Capital abzieht, bis endlich das Capital erlöscht, daß also dadurch nicht nur das Capital selbst, sondern auch die Zinsen von Jahr zu Jahr abnehmen, und zuletzt mit dem Capital zugleich verschwinden.

4. Nach dieser Voraussetzung ist also am Ende des ersten Jahrs das geliehene Capital nur noch

$$a-\left(\frac{p}{b}-\frac{a}{b}\right)=a+\frac{a-p}{b}$$

und die Zinsen am Ende des zweiten Jahrs

$$\left(a+\frac{a-p}{b}\right):b=\frac{a}{b}+\frac{a-p}{b^2}$$

und

und nun wird das Capital

$$\left(a+\frac{a-p}{b}\right)-\left(\frac{p}{b}-\left(\frac{a}{b}+\frac{a-p}{b^2}\right)\right)$$

u. s. f.

5. Weil es hier blos meine Absicht ist, den Gebrauch der geometrischen Reihen zu zeigen, so will ich diese Rechnung nicht weiter fortführen, sondern nur bemerken, daß man auf diese Art folgende Formel findet: ein Capital, das iezt = a ist, ist nach n Jahren

$$p+\frac{(a-p).(b+1)^n}{b^n}$$

Soll also der Creditor das Pfand so lange behalten, bis das Capital a, das er dagegen verliehen hat, verschwindet, so muß

$$p+\frac{(a-p).(b+1)^n}{b^n}=0$$

sein, woraus sich nun die Anzahl von Jahren ergiebt, nach deren Ablauf der Creditor das Pfand wieder herauszugeben verbunden ist.

6. Eine Menge von Rechtsgelehrten glaubt, diese Art der Berechnung enthalte einen unerlaubten Wucher, dadurch der Creditor Zinsen von Zinsen zu zahlen genöthiget werde, welches den Gesezen zuwider seie. Folgende Gründe werden aber die-

diesen schwachen Einwurf in der Kürze aber doch hinreichend widerlegen.

I. Wegen der schon (§. 5.) erwähnten Absicht, habe ich mich folgender Art, die auch in der That leichter und geschwinder als die vorige (§. 4.) auf eine allgemeine Formel führt, bedient. Die Rechte und die Billigkeit erfordern, daß die Rechnung so angestellt wird, daß beide, der Creditor das ihm gegebene Pfand, und der Debitor das ihm geliehene Capital, völlig auf einerlei Art verzinsen müssen; also wenn der Debitor dem Creditor Zinsen von Zinsen anrechnet, dagegen aber auch der Creditor vom Debitor wegen des verliehenen Capitals Zinsen von Zinsen zugerechnet bekommt, und daher letzterer das Pfand nicht wieder fodert, wenn der Creditor auf solche Art sein Capital a nebst den einfachen Zinsen gezogen hat, sondern alsdann erst, wann der Creditor sein Capital a nebst Zinsen von Zinsen hat, so kann der Creditor seinen Debitoren keines unerlaubten Wuchers beschuldigen. Da nun die folgende Rechnung, die sich hierauf gründet, eben die vorhin angeführten Formeln (§. 5.) giebt, so erhellet hieraus die Rechtmäßigkeit solcher Formeln, ohne daß man nöthig hat, sich mit andern auf einen erlaubten Anatocismum zu berufen. Dieses, und daß vielmehr nach der ersten Berechnung der Creditor, dem es doch gradezu die Gesetze verbieten, eine unglaubliche usurariam Pravitatem begeht, erhellet

II. Aus

II. Aus der Vergleichung beider Rechnungsarten mit einander. Nach der ersten erhält der Creditor alle Jahr vom Debitor ein Capital, ohne Zinsen zu geben, das so groß ist, als der Ueberschuß der Früchte über die Zinsen des geliehenen Capitals. Nach der zwoten Rechnung aber geschieht weiter nichts, als daß dieser Fehler, wodurch der Debitor um etwas kommt, das ihm von Rechtswegen gehört, verbessert wird. Den Ueberschuß nämlich, den der Creditor über die Zinsen von a jährlich erhält, kann er nicht umsonst verlangen, sondern er muß ihn als einen Theil des Capitals a ansehen, den ihm der Debitor abträgt, folglich ihn von dem verliehenen Capital a abziehen. Dadurch werden dann freilich auch die jährliche Zinsen von a um soviel vermindert, als gegenseitig die Zinsen durch die jährlich anwachsenden Ueberschüsse, die der Creditor zieht, vermehrt werden. Die Zinsen bleiben also im Grunde betrachtet alle Jahr eben dieselben, und nehmen nicht ab, sondern der Creditor erhält sie alle zugleich mit dem verliehenen Capital nach und nach brevi Manu, dadurch daß er ieden iährlichen Ueberschuß der Früchte über die Zinsen des geliehenen Capitals, ohne Zinsen davon abzugeben, erhält. Da man nun in der ersten Rechnung weder darauf, was der Debitor durch diesen jährlichen unzinsbaren Ueberschuß der Früchte über die Zinsen des geliehenen Capitals verliehrt, noch was der Creditor

dadurch nach und nach gewinnt, und daher dem armen Debitor alle Zinsen, die er durch diesen Verlust genau bezahlt, noch ausserdem alle Jahre hindurch besonders anrechnet; so erhellet hieraus deutlich, was für eine erstaunende usuraria Pravitas in dieser ersten Rechnung verborgen liegt, und ich sehe nicht ein, wie man die zwote als unerlaubt hat verwerfen können, da man bei dieser letztern nicht einmal nöthig hat, sich mit Webern in in seiner tractatione iuridico mathematica de pacto antichretico auf einen in gegenwärtigem Fall erlaubten Anatocismum zu berufen.

7. Dem im vorigen §. gemachten Einwurf von den Zinsen des Ueberschusses sucht Polack dadurch zu begegnen, daß er ihn für unbeträchtlich hält (S. 140. neueste Ausgabe). Es ist aber eben gezeigt worden, daß er genau so viel beträgt, als die Zinsen, die der Creditor bey der zwoten Rechnung dagegen wieder verliehrt. Um nun zu zeigen, wie falsch seine a. a. O. geführte Rechnung ist, will ich noch folgendes beifügen. Er setzt den 16jährigen Ertrag eines Guts = 3858 Thl. also wenn er alle Jahr einerlei ist, jährlich beinahe 241 Thl.; die Zinsen des dagegen geliehenen Capitals betragen a. a. O. ohngefähr jährlich 137 Thl. also

im 1ten Jahr der 1te Ueberschuß 104 Thl. dazu kommt

im 2ten	— —	2te	— also beyde zusammen	208
—3ten	— —	3te	— — drei	—312
—3ten	— —	4te	— — vier	—416
⋮		⋮	⋮	

Auf diese Art hat der Creditor im 16ten Jahr 16 dergleichen Ueberschüsse, also 1664 Thl. Die Zinsen vom Ueberschuß des 1ten Jahrs sind = 5,2

— — — —	2ten	— — =	10,4
— — — —	3ten	— — =	15,6
	⋮		⋮
— — — —	16ten	— — =	83,2

also aus (§. 95. I. St. der Erläut.) die Summe = 707,2 Thl.

Was also Polack für so gering und unbeträchtlich ansieht, beträgt über 700 Thl. statt deren er nur etwas über 80 rechnet. Offenbar hat er blos den jährlichen Ueberschuß von 104 Thl. für die 16 Jahre 16mal genommen, und davon die Zinsen berechnet, die sich, wie die eben gemachte Rechnung ausweist, auf etwas über 80 Thl. belaufen. Schwerlich würde er seine Rechnung zum künftigen Gebrauch in foro empfohlen haben, wenn er diese 700 Thl. gehörig berechnet hätte.

8. Ob man unter p den reducirten Werth eines Pfandes, oder ein wirkliches Capital versteht, ändert in der Rechnung nichts; und der Fall, da sich ein solches pactum antichret. findet, wo p ein wirkliches Capital ist, kann in der That vorkommen. Wenn nämlich Jemand an einem sehr sichern Ort, wo er es nicht gerne aufkündigt, ein Capital p stehen hat, und braucht ietzo zu einem gewissen Zweck ein Capital a, so kann er dieß sub pacto antichret. aufnehmen. und das Capital p dagegen zum Pfande verschreiben, so daß sich der Gläubiger aus den Zinsen von p nach und nach in Absicht auf das Capital a und dessen Zinsen bezahlt machen soll. Dabei ist nun die Frage: wie groß muß das Capital a sein, das man geben muß, um ein Capital p auf n Jahre sub pacto antichret. zu erhalten? in Absicht auf die Antwort mit der völlig einerlei: wie groß muß das Capital a sein, das man geben muß, um ein Capital p auf n Jahre zu erhalten, das einem erst nach dieser Zeit gehört? und da dieß eigentlich so viel heißt: wie groß ist das Interusurium a, das sich der Creditor von dem ihm schuldigen Capital p abziehen lassen muß, wenn er es n Jahre vor der Zeit erhält, so ersieht man hieraus, daß das Interusurium eines Capitals p auf n Jahre berechnen nichts anders heißt, als das Capital a berechnen, das man gegen ein auf n Jahre gegebenes Pfand = p sub pacto antichret erhält. Es ist demnach aus eben den obigen Grün-

den

den die allgemeine und den Rechten gemäße Formel für das Interusurium, wenn e: 1 die Verhältnis ist, in der das Capital jährlich durch die Zinsen wächst,

$$a = \frac{p.(e^n - 1)}{e^n}$$

welches der Leibnizischen Berechnung gemäß ist. Wer also die obige Berechnung verwirft, muß zugleich die Leibnizische Berechnung des Interusuriums verwerfen, und wer jene approbirt, muß auch diese beibehalten. Widerspricht also nicht Polack offenbar seinen eigenen Grundsätzen, da er der Leibnizischen Berechnung des Interusuriums folgt, und doch die Berechnung bei dem pacto antichret. nach der hier angegebenen ersten Art geführt wissen will?

9. Wenn an dem Capital a nach und nach wegen des Ueberschusses der Früchte von dem Pfand über die Zinsen des dagegen geliehenen Capitals so viel abgezogen worden, daß nach n Jahren das Capital verschwindet, so muß nun der Creditor dem Debitor das Pfand wieder restituiren. Nun wird, Zinsen von Zinsen gerechnet, aus p

im 1ten Jahr pe; im 2ten pe^2 - - im nten pe^n; aus a
— — ae; — ae^2 — ae^n;

Giebt also jetzt der Creditor dem Debitor das Pfand wieder zurück, so hat er während diesen n Jahren $pe^n - p$ aus dem Pfande gezogen, und dieß muß,

nach

nach §. 6. I. zu rechnen, $= ae^n$ sein; daraus giebt sich die allgemeine Formel

$$pe^n - p = ae^n$$

oder, weil $e = \frac{b+1}{b}$,

$$p\frac{(b+1)^n}{b^n} - p = a.\frac{(b+1)^n}{b^n}$$

oder

$$(p-a).\frac{(b+1)^n}{b^n} = p$$

welches eben die oben aus Webers Dissertation angeführte Formel ist.

10. Die nur gefundene Formel giebt folgende Gleichungen

$$1)\ n = \frac{lp - l(p-a)}{le}.$$

d. i. Man ziehe das geliehene Capital von dem reducirten Werth des Pfandes ab, und suche in den Tafeln den Logarithmen dieser Differenz auf; eben so suche man den Logarithmen von dem reducirten Werth des Pfandes, und ziehe jenen von diesem ab; den Rest dividire man durch den Logarithmen der Zahl, die die Verhältnis anzeigt, in der das Capital jährlich durch die hinzugekommene Zinsen wächst, so hat man zum Quotienten die Anzahl von Jahren, nach welchen der Creditor das Pfand wieder herauszugeben verbunden ist.

Ex.

Ex. Die Anzahl von Jahren in dem obigen (§. 2.) angegebenen Exempel zu finden.

Aufl. Hier ist der reducirte Werth des Pfandes = 1600 Thl. das aufgenommene Capital = 1000 Thl., also dieser beiden Differenz = 1600 — 1000 = 600 Thl. Nun ist

$$l\ 1600 = 3{,}2041200$$

Abgezogen $l\ 600 = 2{,}7781512$

also die Differenz $= 0{,}4259688$

die Zahl, in der das Capital jährlich wächst, ist $\frac{21}{20}$, und $l\ 21 = 1{,}3222193$

davon abgezog. $l\ 20 = 1{,}3010300$

also $l\frac{21}{21} = l\ 21 - l\ 20 = 0{,}0211893$

Demnach ist die gesuchte Anzahl von Jahren

$$= \frac{4259688}{211893} = 20{,}103 \text{ Jahre} = 20 \text{ Jahre } 37 \text{ Tage } 14 \text{ St.}$$

Da hingegen die obige Rechnung (§. 2.) über 33 Jahre gab.

Wird ein bestimmtes Pfand auf n Jahre gegeben, und das Capital gesucht, das dagegen verliehen werden muß, so hat man

$$2)\ a = \frac{p.\,(e^n - 1)}{e^n}$$

d. h. Man muß die Zahl e auf diejenige Potenz erheben, die durch die bestimmte Anzahl von Jahren gegeben ist, und 1 davon abziehen; sodann die-

diese Differenz mit dem reducirten Werth des Pfandes multipliciren, und dieß Produkt durch die nur erwähnte Potenz von e dividiren.

Und wird ein bestimmtes Capital auf n Jahre verliehen, und das Pfand, das dagegen sub pacto antichretico gegeben werden muß, gesucht, so ergiebt sich

$$3)\ p = \frac{a e^n}{e^n - 1}.$$

11. Die erwähnte Rechnung ist so kurz und leicht, daß ich mich über Webern wundern muß, wie er auf so weitläuftige Art seine Formeln gesucht hat, die übrigens mit der gegenwärtigen übereinkommen. Selbst die Art, wie er sie findet, ist nicht sehr gründlich, da er vermittelst einer ziemlich unvollkommenen Induktion aus der wirklichen Berechnung für einige Jahre (S. 31.) sogleich (S. 32.) einen Schluß auf eine allgemeine Formel macht, die ziemlich unsicher ist, und den er etwa wie der Hr. Autor §. 131. und a. a. O. m. gethan hat, hätte beweisen sollen. Endlich kommt er erst (S. 40.) nach vielen darzwischen geworfenen Sätzen von einem besondern Fall auf den hierher gehörigen allgemeinen.

12. Leiht Jemand ein bestimmtes Capital a, und giebt dagegen auf n Jahre sub pacto antichretico ein Pfand p, so daß $pe^n - p < ae^n$, so ist das,

was

was der Debitor dem Creditor nach Ablauf der n Jahre gegen die Erstattung des Pfandes noch herausgeben muß, welches d heißen soll, =

$$ae^n - (pe^n - p)$$
$$= ae^n + p - pe^n$$
$$= ae^n + p(1 - e^n) \text{ oder}$$
$$= p + (a - p)e^n$$

also ist das, was am Ende eines jeden Jahrs der Debitor seinem Creditor noch schuldig ist, =

$$p + (a - p) . e^n$$

welches eine allgemeine Formel für d ist. Für $pe^n - p > ae^n$ wäre d verneint, d. h. die Formel $d = p + (a - p)e^n$ gäbe in dem Fall, was der Creditor dem Debitor ausser dem Pfand noch zurückgeben müßte, wenn nicht das pact. antichr. so bald $d = 0$ ist, ipso iure aufhörte, daher dann seine Verbindung nicht mehr ex pact. ant. sondern aus andern Rechtsgründen zu beurtheilen ist.

II. Auf das Interusurium.

1.

Weil die Berechnung des Interusuriums mit der eben vorgetragenen auf einerlei Gründen beruht, nur daß sich hier mehr verwickelte Fälle gedenken lassen, so wird es nicht überflüßig sein, auch von dieser noch hier zu handeln.

2. Es

2. Es ist schon in der vorhergehenden Abhandlung (§. 8.) gezeigt worden, daß das für ein Capital p auf n Jahre berechnete Interusurium a sich so ausdrucken läßt, vorausgesetzt, daß das Capital durch die jährliche Zinsen in der Verhältnis e:1 wächst,

$$a = \frac{p(e^n - 1)}{e^n} (\odot$$

Ex. Es hat Jemand nach 10 Jahren 1000 Thl. zu fodern, wie viel muß er sich, die Zinsen zu 5 p. c. gerechnet abziehen lassen, wenn er die Bezahlung gleich ietzo anticipiren will? Hier ist

$$e = \frac{21}{20}$$

$$p = 1000 \text{ Thl.}$$

$$n = 10$$

also das gesuchte Interusurium

$$a = \frac{1000.\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right)}{(21:20)^{10}}$$

wo sich $(21:20)^{10}$ durch Logarithmen so ergiebt

$$10\, l\left(\frac{21}{20}\right) = 0{,}2118930$$

wel-

welches unter der Characteristik 3 aufgesucht die zugehörige Zahl 1628 giebt, also ist

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^{10} = 1,628;$$

also $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{10} - 1 = 0,628$, und

$$a = \frac{1000. \quad 0,268}{1,628}$$

$$= \frac{628}{1,268} = 385 \text{ Thl. } 1 \text{ Fl. } 3 \text{ xr.}$$

3. Es können aber Fälle vorkommen, wo die Formel (☉) §. 2. nicht hinreichend ist, und in diesem Betracht ist sie nicht allgemein oder vollständig genung. Hat nämlich Jemand ein Capital p nach q Jahren, m Jahre lang nach einander zu fodern, so giebt die nur erwähnte Formel den Werth von a nicht vollständig und auf einmal, sondern man muß ihn für iedes Jahr vermittelst dieser Formel besonders suchen, welches der Vollkommenheit der Formeln, die ohnehin nur zur Abkürzung der Rechnung dienen sollen, zuwider ist. Dieser Mangel läßt sich aber auf folgende Art ersetzen.

Weil p von dem qten Jahre excl. m Jahre lang zu zahlen ist, so ist das letzte Jahr, wo p gegeben werden muß, von iezt m+q Jahre entfernt, oder nach m+q Jahren wird p zum letztenmal und nach q Jahren zum erstenmal bezahlt, al-

so muß das Interusurium für folgende Werthe von n in ⊙ berechnet werden

$$☾)\, q+m;\; q+m-1;\; q+m-2;\; q+m-3 \ldots \ldots q+m-m$$

und die Summe aller dieser Interusurien giebt den vollständigen Werth von a. Man setze also die Werthe aus ☾ nach einander statt n in die Gleichung ⊙, so erhält man

$$a = \frac{p.(e^{q+m}-1)}{e^{q+m}} + \frac{p(e^{q+m-1}-1)}{e^{q+m-1}} \ldots \ldots + \frac{p.(e^{q+m-m}-1)}{e^{q+m-m}}$$

$$= \frac{p}{e^{q+m}} \left(e^{q+m}-1+e^{q+m}-e+e^{q+m}-e^2 \ldots \ldots +e^{q+m}-e^m \right)$$

$$= \frac{p}{e^{q+m}} \left((m+1).\, e^{q+m}-(1+e+e^2+e^3 \ldots +e^m) \right)$$

Nun setze man in den Erläuter. vor. Stück (§. 102. I. 2.) m+1 statt n, und 1 statt a, so hat man

$$1+e+e^2+e^3 \ldots\ldots +e^m = \frac{e^{m+1}-1}{e-1}$$

also

also hier

$$a = \frac{p}{e^{q+m}}\left((m+1) \cdot e^{q+m} - \frac{e^{m+1}-1}{e-1}\right)$$

$$= p \cdot \left((m+1) - \frac{e^{m+1}-1}{(e-1) \cdot e^{q+m}}\right) \text{ (♀}$$

Dieses ist die allgemeinste und vollständigste Formel, die sich nur gedenken läßt; sie ist auf alle nur mögliche Fälle anwendbar, und schliest selbst die vorige Formel (⊙) in sich, wenn man nur $m = 0$ setzt, denn dadurch erhält man

$$a = p \cdot \left(1 - \frac{e-1}{(e-1) \cdot e^{q}}\right)$$

$$= p \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{q}}\right) \text{ oder}$$

$$= \frac{p \cdot (e^{q} - 1)}{e^{q}}$$

welches die Formel ⊙ ist, nur q statt n gesetzt.

Der Werth des gegenwärtig zu zahlenden Capitals ist $mp - a$, also den Werth von a gesetzt, giebt aus ♀

$$mp - a = p \cdot \left(m - (m+1) + \frac{e^{m+1}-1}{(e-1) \cdot e^{q+m}}\right)$$

$$= p \cdot \left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1) \cdot e^{q+m}} - 1\right) \text{ (☽}$$

Ex. Es hat Jemand ein Gut für 9000 Thl. gekauft; dieß Kaufpretium soll auf vier Termine bezahlt werden, wovon in fünf Jahren der erste, und die drei darauf folgenden Jahre die drei letzten sein sollen, nun will der Käufer gerne ietzo gleich bezählen, man sucht das Kaufpretium für die gegenwärtige Zeit?

Aufl. Es ist hier $p = \frac{9000}{4} = 2250$, $m=4$, und $q=5$, e bleibt $= \frac{21}{20}$, also

$$mp - a = 2250 \cdot \left(\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^5 - 1}{\frac{1}{20} \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^9} - 1 \right)$$

Nun ist $l \, \frac{21}{20} = 0{,}0211893$
also $l \left(\frac{21}{20}\right)^5 = 0{,}1059465$

Die hierzu gehörige Zahl giebt unter der Character. 3. gesucht $\left(\frac{21}{20}\right)^5 = 1{,}276$, also $\left(\frac{21}{20}\right)^5 - 1 = 0{,}276$;

Ferner $l \left(\frac{21}{20}\right)^9 = 0{,}1907037$
und die zugehörige Zahl ist 1, 551; also
$\frac{1}{20} \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^9 = 0{,}07755$, und

$$mp - a = 2250 \cdot \left(\frac{0{,}276}{0{,}07755} - 1 \right)$$

$$= 2250 \cdot \left(\frac{27600}{7755} - 1 \right)$$

$$= 2250 \cdot \frac{19845}{7755}$$

$$= 5757{,}7 \text{ Thl.}$$

also

also ist das gesuchte gegenwärtige Kaufpretium = 5757 Thl. 1 Fl. 3 xr.

4. Die Berechnung der Quartä Falcidiä ist zu wichtig, als daß ich die Anwendung der Analysis dabei übergehen könnte. Weil ich sie aber hier nur für den Fall betrachte, wo man die Berechnung des Interusuriums dabei nöthig hat, so trage ich sie unter der vorigen Ueberschrift ohne Bedenken mit vor, obgleich noch Dinge dabei in Betrachtung kommen, die man sonsten hier nicht suchen würde.

5. Ein Testator hinterläßt Jemanden ein Legatum annuum = L, das ihm von der Erbschaft, die = h ist, nach q Jahren lebenslänglich ausgezahlt werden soll. Der Erbe hält dieses seiner Falcidiä nachtheilig, und verlangt daher, daß das Legatum annuum so viel vermindert werde, daß ihm die Quarta Falcidia frei bleibe; wieviel beträgt nun hier die Falcidia? Diese Frage gehörig zu beantworten, müssen wir das Capital c suchen, das der Erbe zu zahlen hätte, wenn er alle jährlich einzel auszuzahlende Capitalien L jetzo gleich bezahlen wollte. Wäre m gegeben, so wäre die Summe der nach und nach zu zahlenden Capitalien = m L, und das gegenwärtig zu zahlende Capital = m L — a

$$= L.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).e^{q+m}}-1\right)$$

6. Man muß also zuvorderst m zu bestimmen suchen, und dieß würde man ohnstreitig durch die Sterberegister und besonders durch die Süßmilchischen Beobachtungen bewerkstelligen, wenn nicht die Gesetze den Werth von m festgesetzt hätten. Es wird nämlich in l. 168. ff. ad l. Falc. eine Bestimmung der Werthe von m von Vlpian angegeben, die Aemilius Macer keineswegs verwirft, indem dieser nur von einem wider das klare Gesetz des Ulpians eingeschlichenen vsu fori redet. In diesem angeführten Gesetz, nimmt nun Ulpian an, ein Mensch von

Jahren	lebe noch
0 — 20	30 Jahre
21 — 25	28 —
26 — 30	25 —
31 — 35	22 —
36 — 40	20 —
41 — 50	complementum ad 60
51 — 55	9 —
56 — 60	7 —
60 — 〃	5 —

Schon David setzt die menschliche Lebensdauer auf 70 Jahre, also fande längst vor den Zeiten Ulpians eben das Gesetz der Sterblichkeit statt, das wir iezt haben; und da dem ohngeachtet Ulpian bei dieser Bestimmung blieb, so sind wir auf keine Art berechtigt, davon abzugehen, und, wenigstens

in

gegenwärtigem Fall, die Süßmilchischen Tabellen zu Rathe zu ziehen; diese geben für die Bestimmung von m nur eine praesumtionem hominis, erstere aber eine praesumtionem iuris et de iure, und ist es nicht den allgemeinen Grundsätzen der Rechte zuwider, dieser jene vorzuziehen?

7. Es hat also m überhaupt neun Werthe, und den hierher gehörigen muß man jedesmal aus der Tabelle (§. 6.) nehmen. Hat man nämlich das Alter des Legatarii zur Zeit der angetretenen Erbschaft = n, so muß man, um m zu erhalten, in der Columne zur Linken die Zahl n+q aufsuchen, und nun in der Columne zur Rechten die zu n+q gehörige Zahl nehmen. Weis man nun m, so giebt sich aus (♀ §. 3.)

$$a = L.\left((m+1) - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{q+m}}\right)$$

und mL — a oder

$$c = L\left(.\frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{q+m}} - 1\right)$$

wobei die Gesetze zugleich den größten Werth von c bestimmt haben, so daß

c nicht $> \frac{3}{4}$ h

seyn darf.

8. Ist also

$$L\left(\frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{q+m}} - 1\right) > \frac{3}{4} h$$

 so

so kann der Erbe eine Verringerung des Legats verlangen, und diese Verringerung läßt sich auf eine leichte Art bestimmen. Es muß nämlich, wenn das verminderte Legat λ heißt,

$$\lambda.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).\ e^{q+m}}-1\right)=\tfrac{3}{4}h$$

sein, wenn der Erbe grad die Falcidiam frei haben soll, und dadurch giebt sich der gehörige Werth des annui Legati, nämlich

$$\lambda=\frac{3\ h}{4.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).\ e^{q+m}}-1\right)}$$

Ex. Ein Testator hinterläßt 10000 Thl. und beschwehrt den Erben mit einem Legato annuo von 800 Thl. das er einem Legatario, der iezt 17 Jahre alt ist, nach 5 Jahren lebenslang alle Jahre auszahlen soll; man fragt 1.) ob der Erbe in Ansehung der Falcidiä gravirt sei, und 2.) wie groß das Legat sei, das der Legatarius jährlich verlangen könne?

Hier ist $n=17$, $q=5$, also $n+q=22$; man suche demnach in der Columne zur Linken die Zahl 22, so ist die dazu gehörige in der zur Rechten $=28=m$; nun ist ferner $L=800$ Thl. $h=10000$ Thl. und $e=\frac{21}{20}$, also

$$L\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).\ e^{q+m}}-1\right)=800.\left(\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{29}-1}{\frac{1}{20}.\left(\frac{21}{20}\right)^{33}}-1\right)$$

Nun

Nun ist aus dem vorhergehenden

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^{10} = 1,628$$

also $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{20} = 1,628^2 = 2,650$

multiplicirt mit $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{9} = 1,551$

giebt $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{29} = 4,110$, und $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{29} - 1 = 3,110$,

multiplicirt mit $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{4} = 1,215$

giebt $\left(\tfrac{21}{20}\right)^{33} = 4,9936$

und nun dividirt durch 20, giebt

$$\tfrac{1}{20}\left(\tfrac{21}{20}\right)^{33} = 0,24968$$

demnach

$$L.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).e^{q+m}}-1\right) = 800.\left(\frac{3,11}{0,24968}-1\right)$$

$$= 800.\left(\frac{311000}{24968}-1\right)$$

$$= 800.\ \frac{286032}{24968}$$

$$= 9164 \text{ Thl. } 1 \text{ Fl. } 3 \text{ xr.}$$

also wäre $c > \frac{3}{4}h$, da $h = 10000$ ist. Das Legat muß demnach verringert werden, so nämlich, daß das annuum Legatum

$$\lambda = \frac{3\,h}{4.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).e^{q+m}}-1\right)} \text{ Thl.}$$

wird; dieß giebt nun hier

$$\lambda = \frac{30000}{4\left(\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{29}-1}{\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^{33}}-1\right)}$$

$$= \frac{7500}{286032 : 24968}$$

$$= 654 \text{ Thl. } \quad 54 \text{ xr.}$$

Statt der vermachten jährlichen 800 Thl. kann demnach der Legatarius nicht mehr als 654 Thl. 54 xr jährlich fodern.

9. Stirbt nun der Legatarius nach r Jahren, so ist entweder $r > m$, oder $r < m$; im ersten Fall hat das Recht des Legatarii schon vor Verlauf der r Jahre aufgehört, indem der Erbe am Ende des mten Jahres das Legat zum letztenmal auszahlt; ist hingegen $r < m$, so ist entweder

$$L.\left(\frac{e^{r+1}-1}{(e-1)\,e^{q+r}}-1\right) > \tfrac{3}{4}h$$

und in solchem Fall behält λ seinen vorigen Werth; und das Legat λ muß den Erben des Legatarii noch $m-r$ Jahre lang fort bezahlt werden, damit sie $\frac{3}{4}h$ erhalten, welches ihnen mit Recht zukommt, oder es ist nicht

$$L\left(\frac{e^{r+1}-1}{(e-1).\,e^{q+r}}-1\right) > \tfrac{3}{4}h$$

In diesem Fall hätte dem Legatario alle Jahr das ihm hinterlaßene Legat = L ohnvermindert gehört; weil er nun statt dessen nur

$$\frac{3h}{4\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1)e^{q+m}}-1\right)}=\lambda,$$ also alle Jahre $L-\lambda$

r Jahre lang zu wenig erhalten hat, so muß den Erben des Legatarii dieser Verlust ersetzt werden. Nun ist der gegenwärtige Werth von einem Capital $L-\lambda$, das mir von iezt an r Jahre lang nach einander bezahlt wird $= r(L-\lambda)-a$, also in D §. 3. $m=r$, $q=0$, und $p=L-\lambda$ gesetzt, giebt diesen Werth =

$$(L-\lambda).\left(\frac{e^{r+1}-1}{(e-1).e^{r}}-1\right)$$

$$=(L-\lambda).\frac{e^{r}-1}{(e-1).e^{r}}$$

Also hat der Legatarius, der nach r Jahren stirbt, ein Capital zu fodern, das schon vor r Jahren $=(L-\lambda).\left(\frac{e^{r}-1}{(e-1).e^{r}}\right)$ ware, und das also iezo, nämlich nach dem Verlauf von r Jahren $=(L-\lambda).\left(\frac{e^{r}-1}{(e-1).e^{r}}\right)$

$$=\left(L-\frac{3h}{4.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).e^{q+m}}-1\right)}\right).\frac{e^{r}-1}{(e-1).e^{r}}$$

Dieß

Dieß ist also der Ersatz, den die Erben des Legatarii zu födern haben.

Ex. Es sei alles wie im Ex. §. 8. und der Legatarius sterbe nach 10 Jahren; man sucht den Ersatz den die Erben desselben nun noch verlangen können?

Hier ist also $m = 28$, $r = 10$, $q = 5$, $L = 800$ Thl. $h = 10000$ Thl. und $e = \frac{21}{20}$, demnach der gesuchte Ersatz $= (800 - 654,6) . \frac{0,628}{0,0814}$

$= \frac{145,4 . 6280}{814} = 1121$ Thl. 1 Fl. 3 xr.

Geometrische Aufgaben.

§. 153.

Daß sich diese Aufgabe weit allgemeiner, als es hier geschehen ist vortragen laße, habe ich schon im vor. St. der Erläuter. erinnert. Die Aufgabe ließe sich nämlich allgemein so abfaßen:

Aus drei gegebenen Seiten eines Dreiecks den Halbmesser des Kreises zu finden, in den sich das Dreieck verzeichnen läßt:

und ob ich gleich a. a. O. schon eine Auflösung beigefügt habe, so wird es mir doch verstattet sein, noch

noch eine andere kürzere hier anzugeben. Außerdem verdienen die Vierecke eine ähnliche Betrachtung, und ich glaube daher nichts ganz unnützes zu unternehmen, wenn ich hier auf einigen Blättern etwas davon vortrage.

1. Allgemeine geometrische Gründe, die ich hier billig voraussetzen kann, berechtigen mich, folgenden Satz *) als erwiesen anzunehmen:

Des

*) Solchen, die nur etwas von den ersten Gründen der Analysis des Unendl. wissen, wird es nicht unangenehm sein, wenn ich von diesem Lehrsatze folgenden allgemeinen Beweis beibringe, der übrigens nicht neu ist. S. Comment. Petrop. T. IX. p. 138.

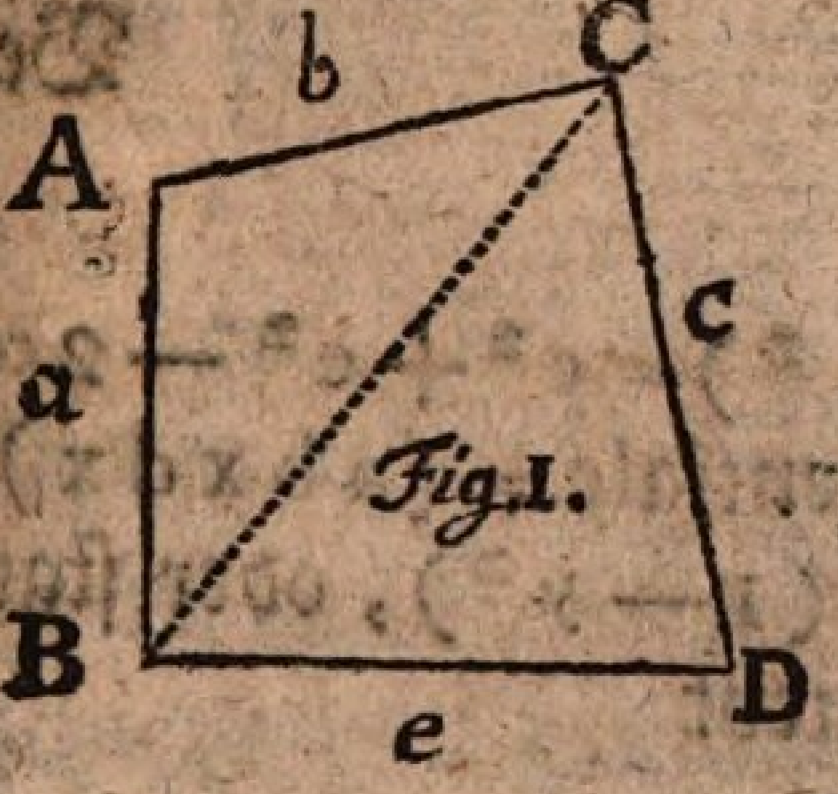


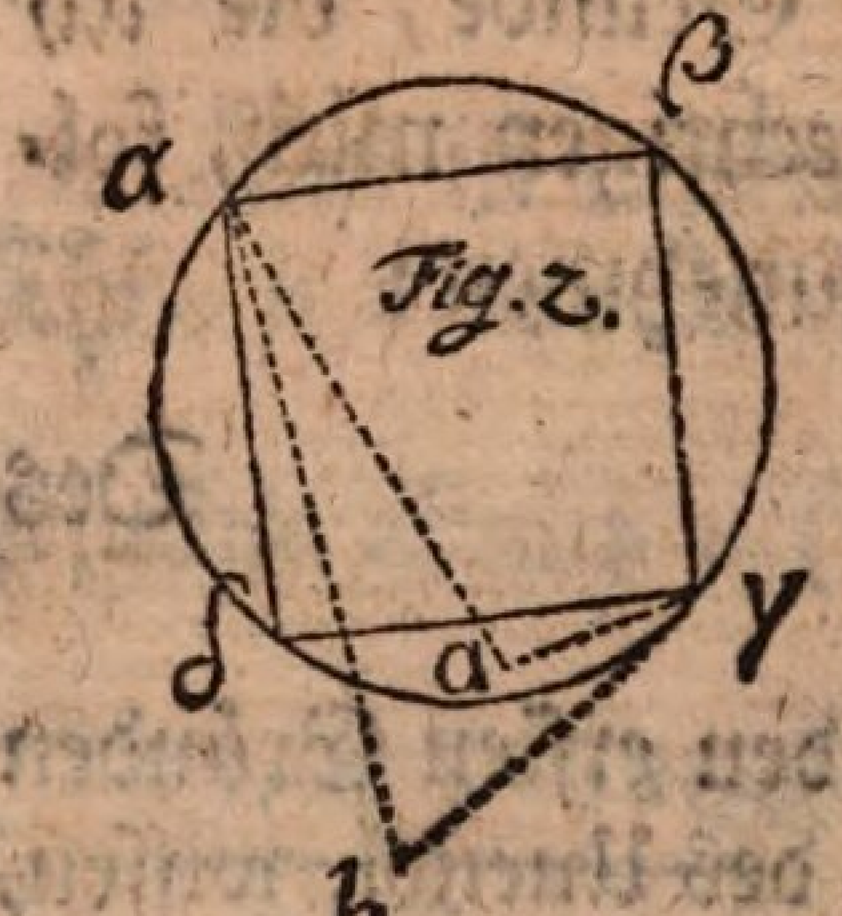
Fig. 1.

Es sei sin BAC = x, sin BDC = y; man ziehe die Diagonale BC, so ist des Dreiecks BAC Inhalt $= \frac{abx}{2}$, des BDC $= \frac{cey}{2}$. Nun ist aber die Summe dieser beiden Flächen des Vierecks Inhalt, also soll $\frac{abx + cey}{2}$ der Aufgabe gemäß den größten möglichen Werth bekommen; mithin wird dieses Ausdrucks Differentiale = o, nämlich $\frac{abdx + cedy}{2} = o$, oder abdx + cedy = o, und abdx = — cedy; ferner BC² =

a²

Des größten Vierecks, das sich aus vier gegebenen Seiten verzeichnen läßt, gegen über stehende Winkel ergänzen einander zu zween rechten.

2. Vierecke, deren gegen über stehende Winkel einander zu zween rechten ergänzen, liegen mit ihren Winkelpunkten in dem Umfang eines Kreises.



Be-

$a^2 + b^2 - 2ab\sqrt{(1 - x^2)} = c^2 + e^2 - 2ce\sqrt{(1 - y^2)}$, dessen Differentiale $= (abxdx) : \sqrt{(1 - x^2)} = ceydy : \sqrt{(1 - y^2)}$, oder statt $cedy$, $-abdx$ gesetzt, giebt

$$\frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{-y}{\sqrt{(1 - y^2)}}$$ d. i.

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{-\sin D}{\cos D}$$ oder $\tan A = -\tan D$;

Folglich ergänzen A und D einander zu 180°, mithin auch B und C. Man kann auch so schließen: aus $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{-\sin D}{\cos D}$ folgt $\sin A . \cos D = -\sin D . \cos A$, mithin $\sin A . \cos D + \sin D . \cos A = \sin(A + D) = 0$, folglich $A + D = 180°$, weil $A + D < 360°$ sein muß.

Beweis. Drei Punkte α, β, γ, liegen allemal in dem Umfang eines Kreises. Nun setze man, der vierte Winkelpunkt des Vierecks läge nicht in dieses Kreises Umfang, sondern entweder in a einem Punkt innerhalb, oder in b einem Punkt außerhalb des Kreises, so wäre im ersten Fall $\alpha a \gamma > \delta$, im andern $\alpha b \gamma < \delta$, also allemal $a + \beta$, oder $b + \beta$ in $= \delta + \beta$ oder in $= 2$ R | wider die Voraussetzung.

3. Also liegen die vier Winkelpunkte des größten Vierecks, das sich aus vier gegebenen Linien verzeichnen läßt, in dem Umfang eines Kreises.

4. Vierecke, die einerlei Seiten haben, und in dem Umfang gleich großer Kreise liegen, sind gleich groß, wenn gleich ihre Seiten in ganz verschiedener Ordnung auf einander folgen.

Beweis. Das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ (fig. 2.) liege mit seinen Winkelpunkten in einem Kreis, so macht es in demselben vier Kreisabschnitte; diese nenne man λ, μ, ν, ϱ, die Kreisfläche heiße P, und des Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$ Inhalt M, so ist $M = P - (\lambda + \mu + \nu + \varrho)$. Eben diese vier Seiten seien nun auf irgend eine andere Art zusammengesetzt, doch so, daß das Viereck, welches daraus entsteht, wieder in den vorigen Kreis paßt, so ist klar, daß wieder vier

Kreis-

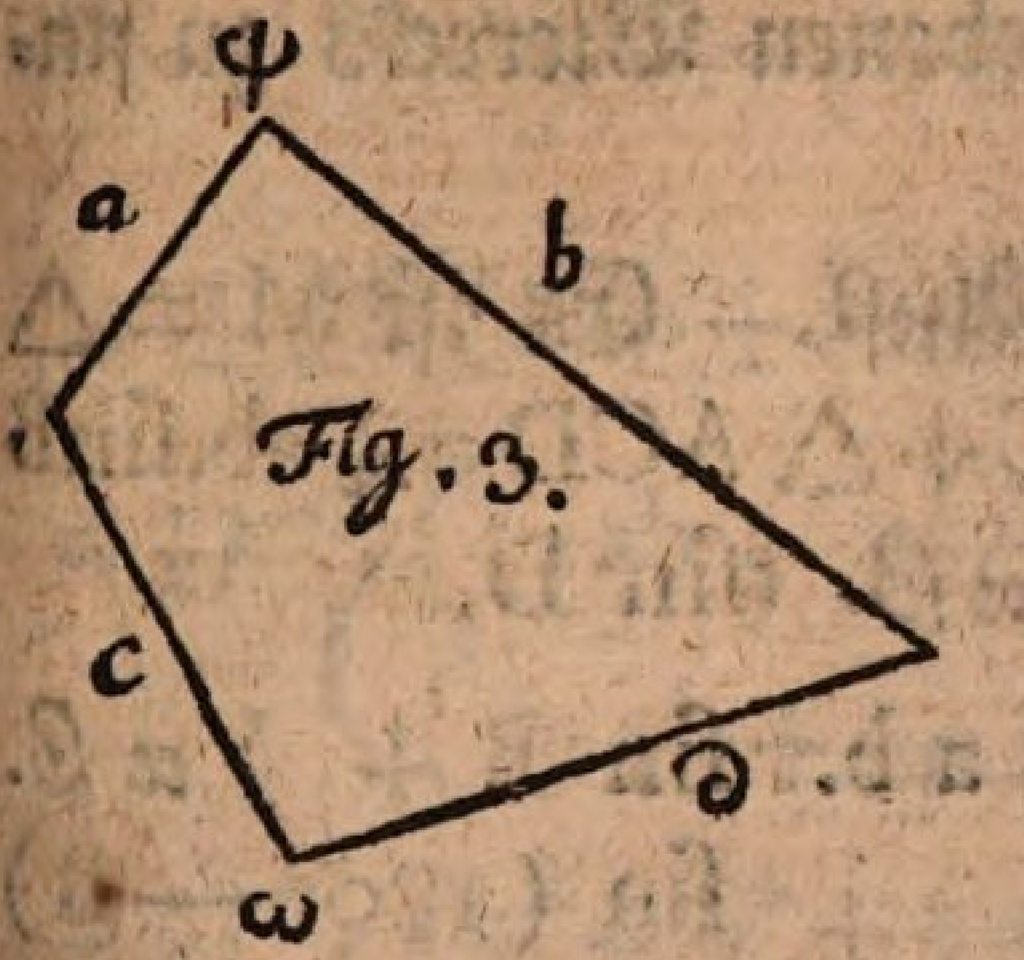
Kreisabschnitte entstehen müssen, die mit den vorigen von gleicher Größe sind, denn gleiche Sehnen in gleichen Kreisen geben gleiche Kreisabschnitte. Heist demnach dieses Vierecks Inhalt N, so ist $N = P - (\lambda + \mu + \nu + \varrho)$ aber auch $M = P - (\lambda + \mu + \nu + \varrho)$, folglich $N = M$;

5. Unter allen Vierecken, die sich aus vier gegebenen Seiten in eben der Ordnung genommen verzeichnen lassen, ist das größte, dessen vier Ecken in dem Umfang eines Kreises liegen. Nun bleibt das Viereck, wenn seine vier Winkelpunkte in einer Kreislinie liegen, allemal gleich groß, man mag seine vier Seiten in welcher Ordnung man will, auf einander folgen lassen; folglich ist ein Viereck, dessen vier Winkelpunkte in einem Kreis liegen, das größte unter allen Vierecken, die sich aus eben den Seiten, in welcher Ordnung man will, zusammensetzen lassen. Elvius *) irrt daher, indem er dem angeführten Satz diese Allgemeinheit nicht giebt, sondern ihn dahin einschränkt, daß ein in einen Kreis beschriebenes Vieleck nur unter solchen Vielecken das größte sei, welche mit ihm einerlei Seiten in eben der Ordnung gestellt haben. S. unten §. 8.

6. Den

*) Abhandl. der königl. Schwed. Akad. III. Th. S. 160. f.

6. Den Winkel ψ zu finden, unter welchem man zwo von vier gegebenen Seiten zusammensetzen muß, daß das ganze Viereck $\omega\psi$ mit seinen Winkelpunkten in den Umfang eines Kreises falle, und also das größte werde, das sich aus den vier gegebenen Seiten verzeichnen läßt.



Aufl. Es ist $a^2 + b^2 - 2ab.\,\mathrm{Cos}\,\psi = c^2 + d^2 - 2cd.\,\mathrm{Cos}\,\omega$, aber $\omega = 180° - \psi$, also $\mathrm{Cos}\,\omega = -\mathrm{Cos}\,\psi$, und daher

$$a^2 + b^2 - 2ab.\,\mathrm{Cos}\,\psi = c^2 + d^2 + 2cd.\,\mathrm{Cos}\,\psi$$

Folglich $\mathrm{Cos}\,\psi = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

Ex. Es sei $a = 2, b = 4, c = 3, d = 5$, so ist

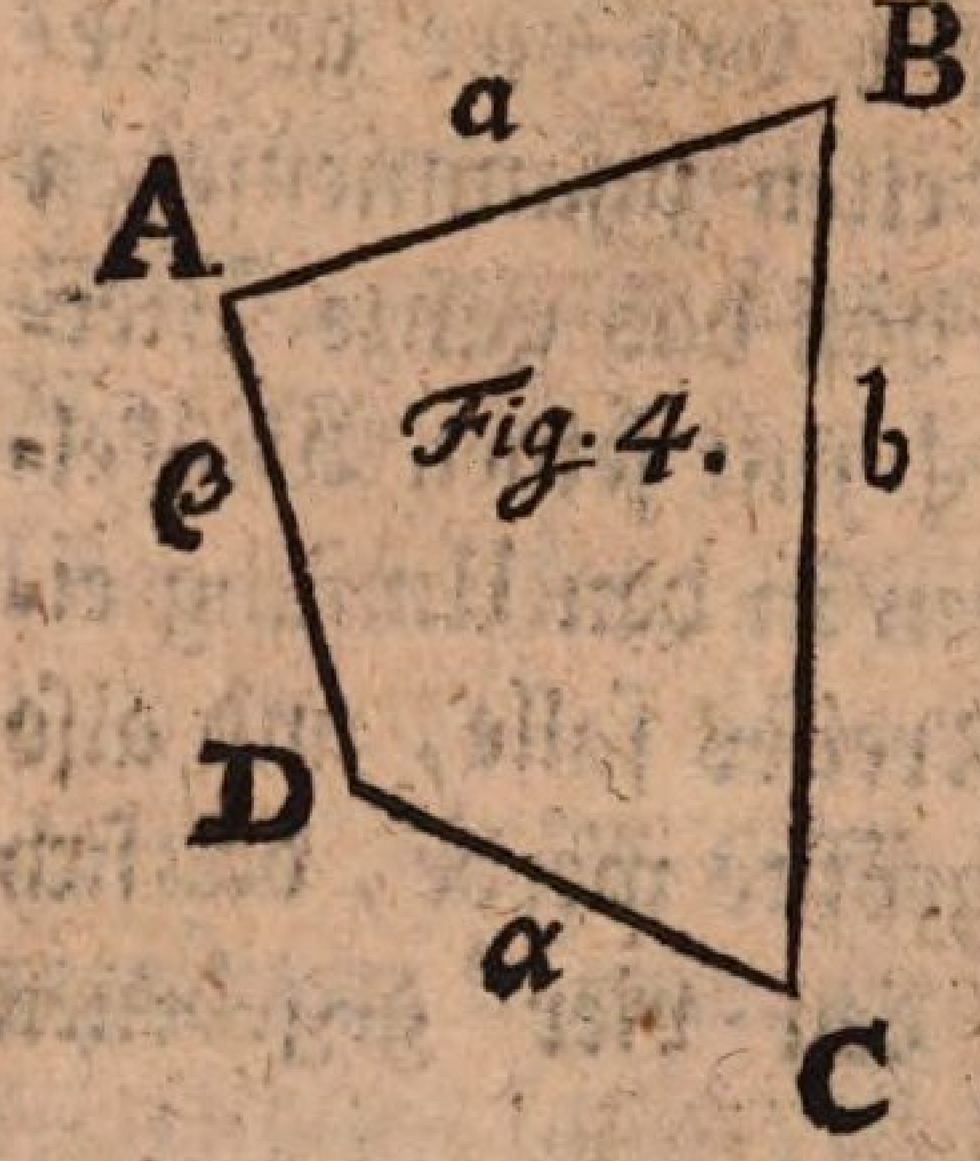
$$\mathrm{Cos}\,\psi = \frac{4 + 16 - 9 - 25}{2(8 + 15)}$$

$$= -\frac{14}{46}$$

$$= -0{,}3043478$$

Nun ist $0{,}3043478 = \mathrm{Cos}\,72°\,17'$, also $-0{,}3043478 = \mathrm{Cos}\,(180° - 72°\,17') = \mathrm{Cos}\,(107°\,43')$, demnach $\psi = 107°\,43'$

7. Den Inhalt M eines in einen Kreis beschriebenen Vierecks zu finden.



Aufl. Es ist $M = \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} ab. \sin B + \frac{1}{2} \alpha\beta. \sin D.$

$= \frac{1}{2} a b. \sin B + \frac{1}{2} \alpha\beta. \sin (180^\circ - B)$

$= \frac{1}{2} ab. \sin B + \frac{1}{2} \alpha\beta. \sin B$

$= \left(\frac{ab+\alpha\beta}{2}\right). \sin B$

8. Aus 6. ist $\operatorname{Cos} B = \frac{a^2+b^2-{}^2-\alpha\beta^2,}{2(ab+\alpha\beta)}$ folglich

$$\sin B = r\left(1 - \frac{(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)^2}{4.(ab+\alpha\beta)^2}\right)$$

$$= \frac{r(4.(ab+\alpha\beta)^2 - (a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)^2)}{2.(ab+\alpha\beta)}$$

Dieß in die Gleichung für M (§. 7.) gesetzt, giebt

$$M = \left(\frac{ab+\alpha\beta}{2}\right). \frac{r(4.(ab+\alpha\beta)^2-(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)^2)}{2.(ab+\alpha\beta)}$$

=

$$= \frac{\sqrt{4.(ab+\alpha\beta)^2-(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)^2}}{4}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(2ab+2\alpha\beta)^2-(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\begin{pmatrix}((2ab+2\alpha\beta)+(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2))\times \\ ((2ab+2\alpha\beta)-(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2))\end{pmatrix}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\begin{pmatrix}(a^2+b^2+2ab-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta))\times \\ (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-(a^2+b^2-2ab))\end{pmatrix}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-(\alpha-\beta)^2).((\alpha+\beta)^2-(a-b)^2)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+\alpha-\beta).(a+b+\beta-\alpha).(a+\beta+\alpha-b).(b+\alpha+\beta-a)} \quad (\mathfrak{C})$$

Dieser Ausdruck giebt also des Vierecks Inhalt aus den blosen Seiten, und ist für die Rechnung mit den Logarithmen sehr bequem. Auch erhält der Satz (§. 5.) hierdurch seine Bestätigung, da die Größe unter dem Wurzelzeichen einerlei bleibt, wie man auch die Seiten a, b, α, β, auf einander folgen läßt.

Ex. Es sei $a = 173''$, $b = 200''$,
$a = 271''$, $\beta = 197''$,

so ist $a + b + \alpha - \beta = 447''$
$a + b + \beta - \alpha = 299''$
$\alpha + \beta + a - b = 641''$
$\alpha + \beta + b - \alpha = 395''$

und $l\ 447 = 2,6503075$

$l\ 299 = 2,4756712$

$l\ 641 = 2,8068580$

$l\ 395 = 2,5965971$

Addirt giebt $10,5294338$

Dividirt durch $2)$

giebt $4,2647169 + 1$

Abgezogen $0,6020600$

läßt $3,6626569 + 1$

Also $l\,M = 3,6626569 + 1$, dessen zugehörige Zahl $= 45980$, folglich ist

$M = 4$ Q. R. 59 Q. S. 80. Q. Z.

für $a = b = \alpha = \beta$ wird

$$M = \sqrt{((a+b).(a+b).(\alpha+\beta).(\alpha+\beta))}:4$$

$$= \sqrt{(2a.\ 2a.\ 2a.\ 2a)}:4$$

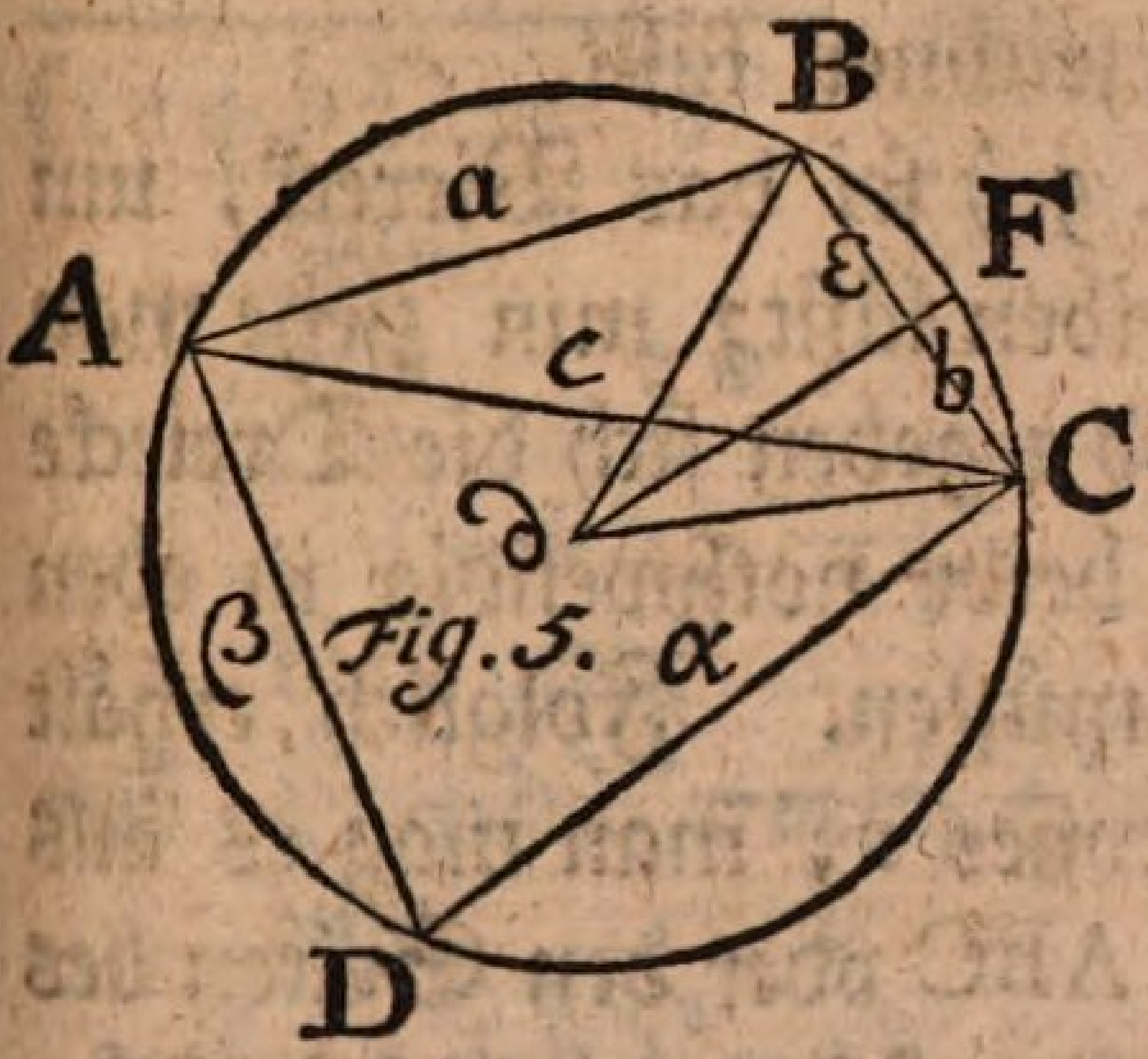
$$= \frac{4a^2}{4}$$

$$= a^2$$

wie erfodert wird, wenn die gefundene allgemeine Formel (C) richtig sein soll.

9. Aus

9. Aus den drei gegebenen Seiten eines Dreiecks den Halbmesser des Kreises zu finden, worin sich das Dreieck verzeichnen läßt.



Aufl. d sei des Kreises Mittelpunkt, r sein Halbmesser; a, b, c, die gegebenen Seiten des Dreiecks ABC, so ist $BAC = \frac{1}{2}\,BdC$; nun sei dE auf BC senkrecht, so ist $BdF = \frac{1}{2}\,BdC = BAC$; aber $\frac{Bd}{BE} = \frac{\frac{1}{2}b}{r} = \sin BdF = \sin BAC$, folglich $r = \frac{1}{2}\,b : \sin BAC = b : 2 \sin BAC$ (⊙). Nun ist $\sin A =$

$$\frac{\sqrt{((a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a))}}{2ac}$$

mithin wird aus (⊙) $r =$

$$\frac{b}{\frac{2.\sqrt{((a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a))}}{2ac}}$$

(☾) $=$

$$\frac{abc}{\sqrt{((a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a))}}$$

10. Aus vier gegebenen Linien den Halbmesser des Kreises zu finden, in welchen sich aus denselben ein Viereck verzeichnen läßt.

Aufl. ABCD (fig. 5.) sei das Viereck, um das sich ein Kreis beschreiben läßt; nun ziehe man die Diagonale AC = c, so ergeben sich die Dreiecke ABC und ADC, welche beide nothwendig in eben demselben Kreis liegen müssen. Folglich erhält man allemal ein gleich großes r, man mag es aus den Seiten des Dreiecks ABC oder den Seiten des Dreiecks ADC bestimmen. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{abc}{\sqrt{((a+b+c).(a+b-c).(a+c-b).(b+c-a))}} = \frac{\alpha\beta c}{\sqrt{((\alpha+\beta+c).(\alpha+\beta-c).(\alpha+c-\beta)(\beta+c-\alpha))}}$$

mithin

$$\frac{a^2b^2}{((a+b)^2-c^2).(c^2-(a+b)^2)} = \frac{\alpha^2\beta^2}{((\alpha+\beta)^2-c^2).(c^2-(\alpha+\beta)^2)} \text{*)}$$

oder

*) Hier sollte eigentlich in den beiden Nennern $c^2-(a-b)^2$ und $c^2-(\alpha-\beta)^2$ stehen; aber das beiahte Zeichen statt des verneinten gesetzt, macht hier, da es auf beiden Seiten geschieht, keine Veränderung der Gleichheit. Wer dieß nicht

oder

$$\frac{-a^2\,b^2}{((a+b)^2-c^2)^2} = \frac{-\alpha^2\,\beta^2}{((\alpha+\beta)^2-c^2)^2}$$

und

$$\frac{ab}{(a+b)^2-c^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2-c^2}$$

dieß giebt

$$\alpha\beta\,.\,(a+b)^2-\alpha\beta\,.\,c^2=ab\,.\,(\alpha+\beta)^2-ab\,.\,c^2$$

und

$$\alpha\beta\,.\,(a+b)^2-ab\,.\,(\alpha+\beta)^2=(\alpha\beta-ab)\,.\,c^2$$

Folglich

$$c=\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta\,.\,(a+b)^2-ab\,.\,(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta-ab}\right)}$$

oder

$$c=\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta\,.\,(a^2+b^2)-ab\,.\,(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta\,.-ab}\right)}$$

Dieß in die Gleichung für r (§. 9.) (C.) gesetzt

nicht so übersehen kann, darf auch nur so verfahren: aus α, β und Cos D suche er eine Gleichung für c, und substituire dann den Werth von $\text{Cos}\,D=\frac{\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2}{2(\alpha\beta+ab)}$, so giebt sich nach gehöriger Rechnung, welche hier auszuführen unnöthig ist, eben so

$$c^2=\frac{\alpha\beta\,.\,(a^2+b^2)-ab\,.\,(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta-ab}$$

giebt

$$r^2 = \frac{\alpha^2\beta^2.(\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab.(\alpha^2+\beta^2)):(\alpha\beta-ab)}{\left((\alpha+\beta)^2-\frac{\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab.(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta - ab}\right)\times\left(\frac{\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab.(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta - ab}-(\alpha+\beta)^2\right)}$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2.(\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab.(\alpha^2+\beta^2)):(\alpha\beta-ab)}{\left(\frac{(\alpha+\beta)^2.(\alpha\beta-ab)-\alpha\beta.(a^2+b^2)+ab.(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta - ab}\right)\times\left(\frac{\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab.(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2.(\alpha\beta-ab)}{\alpha\beta - ab}\right)}$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2.(\alpha\beta-ab).(\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab.(\alpha^2+\beta^2))}{[(\alpha+\beta)^2.(\alpha\beta-ab)-\alpha\beta.(a^2+b^2)+ab(\alpha^2+\beta^2)]\times-[(\alpha+\beta)^2.(\alpha\beta-ab)-\alpha\beta.(a^2+b^2)+ab.(\alpha^2+\beta^2)]}$$

$$= -\frac{\alpha^2\beta^2.(\alpha\beta-ab).(\alpha\beta.(a^2+b^2)-ab(\alpha^2+\beta^2))}{[(\alpha+\beta)^2.(\alpha\beta-ab)-\alpha\beta.(a^2+b^2)+ab.(\alpha^2+\beta^2)]^2}$$

wo der Nenner

$$= \left(\begin{array}{l} \alpha^3 \,.\, \beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 \\ -\ 2ab\alpha. \\ -\ \alpha a^2. \\ -\ \alpha b^2. \end{array} \right)^2$$

$$= (\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 - (a+b)^2\alpha\beta)^2$$

$$= ((\alpha+\beta)^2 . \alpha\beta - (a+b)^2 . \alpha\beta)^2$$

$$= ((\alpha+\beta)^2 - (a+b)^2)^2 . \alpha^2\beta^2$$

Folglich $r^2 =$

$$\frac{(ab-\alpha\beta).(\alpha\beta.(a^2+b^2) - ab.(\alpha^2+\beta^2))}{((\alpha+\beta)^2 - (a+b)^2)^2}$$

und $r =$

$$\frac{\sqrt{((ab-\alpha\beta).(\alpha\beta.(a^2+b^2) - ab.(\alpha^2+\beta^2)))}}{(\alpha+\beta)^2 - (a+b)^2}$$

11. Die nur gefundene Formul für r läßt sich prüfen, wenn man in ihr $\alpha = \beta = a = b$ setzt.

Für diesen Fall wird

$$r = \frac{\sqrt{((ab-\alpha\beta).(ab-\alpha\beta).(a^2+b^2))}}{(\alpha+\beta)^2 - (a+b)^2}$$

$$= \frac{(ab-\alpha\beta).\sqrt{(a^2+b^2)}}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-a^2-b^2-2ab}$$

$$= \frac{(ab-\alpha\beta).(\pm\sqrt{(a^2+b^2)})}{2(\alpha\beta-ab)+(\alpha^2+\beta^2)-(a^2+b^2)}$$

 $= \mp$

$$= \frac{\mp(\alpha\beta - ab) . \sqrt{(a^2+b^2)}}{2(\alpha\beta-ab)+(\alpha^2+\beta^2)-(a^2+b^2)}$$

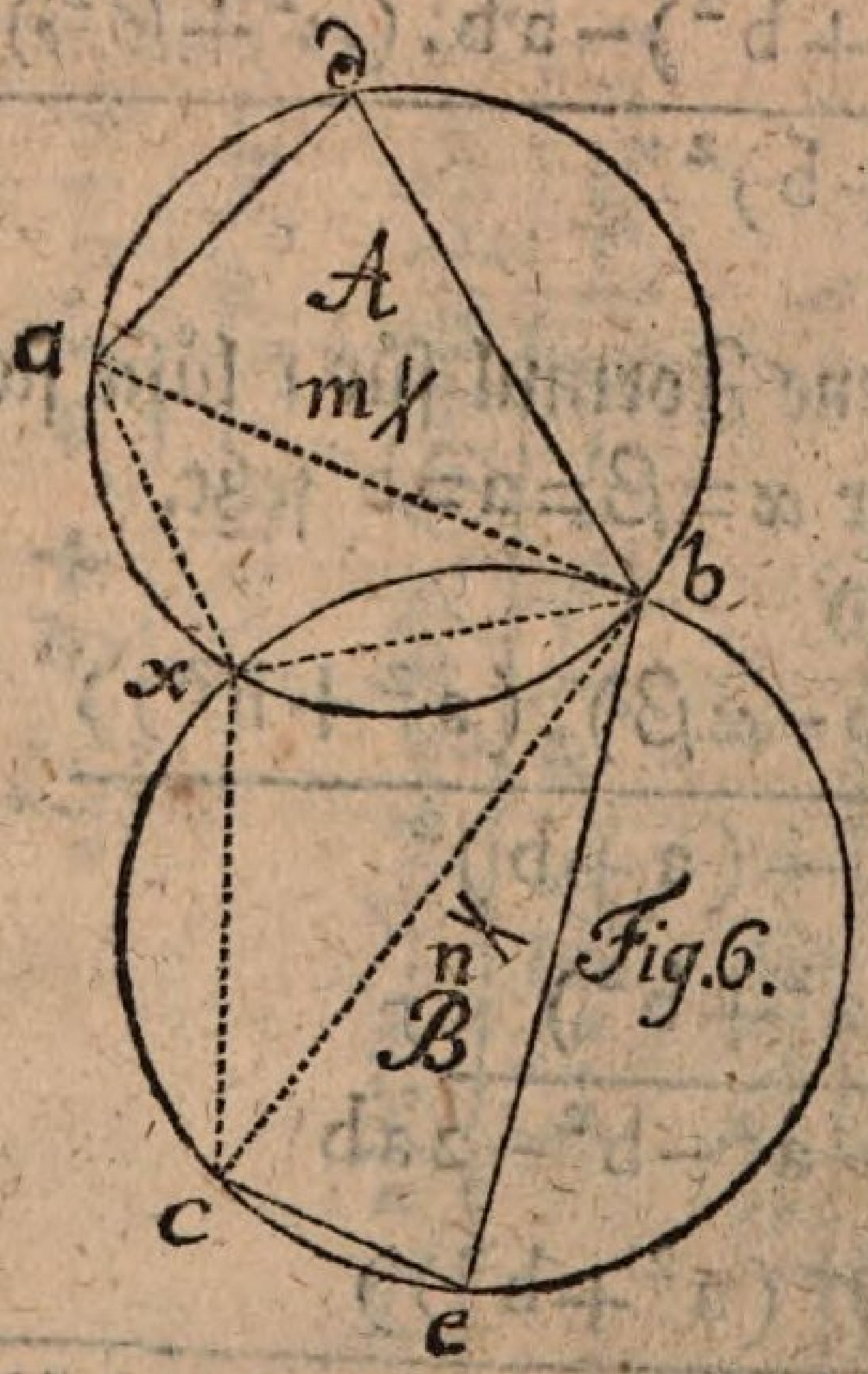
wo der Nenner $= 2(\alpha\beta - ab)$, weil $\alpha^2+\beta^2 = a^2+b^2$; es ist demnach

$$r = \frac{(\alpha\beta - ab) . (\mp\sqrt{(a^2+b^2)})}{2(\alpha\beta-ab)}$$

$$= \frac{\mp\sqrt{(a^2+b^2)}}{2}$$

wie erfordert wird, weil in diesem Fall das Viereck ein Quadrat ist.

12. Einen Punkt x zu finden, der eine solche Lage hat, daß Linien von x nach a, b, c, gezogen, zu beiden Seiten Räume A, B, abschneiden, die die größten unter allen sind, die sich von ax, bx, bd, da, und xb, be, ec, cx einschliesen lassen, verfahre man so:



Aus

Aus a und b mache man mit dem Halbmesser $\frac{ab}{2 \sin d}$ (§. 9. ⊙) Bögen, die in m einander schneiden, und beschreibe nun aus m mit ma = mb einen Kreis. Eben so mache man mit dem Halbmesser $\frac{bc}{2 \sin e}$ Bögen, die einander in n schneiden, und beschreibe mit nb = nc einen Kreis aus n. In x, wo beide Kreise einander schneiden, ist der gesuchte Punkt; es ist nämlich $axb = 180° - d$, und $bxc = 180° - e$, wie sich für größte Vierecke gehört.

Das Newtonische Parallelogramm.

§. 640.

$$SY = PD + \frac{WP.\ SA}{SC}$$

$$= (l-r+d).\ MK + \frac{((\lambda-n).\ ML).\ d.\ MK}{\delta.\ ML}$$

$$= (l-r+d).\ MK + \frac{\lambda-n}{\delta}.\ d.\ MK$$

$$= (l-r+d+d.(\lambda-n):\delta).\ MK$$

Nun ist $SY > AS$, also $SY > d.\ MK$, oder

(l-

$(l-r+d+(\lambda-n).d:\delta).MK > d.MK$

Folglich

$$l-r+d+(\lambda-n).d:\delta > d$$

§. 641.

Der Werth von A ist $rb+nm$, also C=A gesetzt, giebt $(r-d).b+(n-\delta)m=rb+nm$, oder

$$-db-\delta m=0$$

also

$$-db=\delta m$$

und

$$m=\frac{-db}{\delta}$$

Nimmt man für A und C die Werthe $2m-2b$ $-m-3b$ an, und setzt diese einander gleich, so giebt die Gleichung $-m-3b=2m-2b$

$$m=-\tfrac{1}{3}b$$

und $$C=A=-m-3b$$
$$=+\tfrac{1}{3}b-\tfrac{9}{3}b$$
$$=-\tfrac{8}{3}b$$

§. 657.

Solchergestalt kommt rc. rc. Nach 656. kommt nämlich R zuerst im $r+1$ ten Gliede der Reihe der Gleichung vor; die Reihe III. aber fängt sich im $f+1$ ten Gliede der Reihe der Gleichung an

an (655.); ist also, wie der Lehrsatz voraussetzt, $f > r$, so folgt das $f + 1$te Glied erst nach dem $r + 1$ten, oder R kommt in der Reihe der Gleichung vor, ehe sich die Reihe III. anfängt. Nun fängt sich aber, wie gleichfalls im Lehrsatze vorausgesetzt wird, III. unter allen zuerst nach den Anfangsreihen an, folglich kommt R in der Reihe der Gleichung überhaupt eher vor, als sich irgend eine andere Reihe eines Theils anfängt.

§. 656.

Die Gleichung

$$x^3 - a^2 y + y^2 x + y^3 = 0 \quad (A'$$

verglichen mit

$$p y^\varkappa x^\tau + q y^\varepsilon x^\eta + r y^\lambda x^\mu + s y^\varrho x^\pi = 0 \quad (648.)$$

giebt

I.) $p = 1$; $\varkappa = 0$, $\tau = 3$;
II.) $q = -a^2$; $\varepsilon = 1$; $\eta = 0$;
III.) $r = 1$; $\lambda = 2$; $\mu = 1$;
IV.) $s = 1$; $\varrho = 3$; $\pi = 0$;

Die Reihe

$$y = A x^3 + B.x^5 + C x^7 \text{----} \quad (B'$$

verglichen mit

$$y = A x^m + B x^{m+d} + C x^{m+2d} \text{----} \text{---} + R x^{m+rd} \quad (645.)$$

giebt $m = 3$, $d = 2$,

Also

Also $m\varkappa+\tau=3.0+3=3;$

$m\varepsilon+\eta=3.1+0=3=m\varkappa+\tau;$

$m\lambda+\mu=3.2+1=7;$

also

$$m\lambda+\mu-(m\varkappa+\tau)=fd\,(655)=7-3=4$$

aber $d=2$, folglich $f=2$;

Nun wird in der Reihe (A′) durch die Reihe (B′) ausgedruckt, das erste Glied die Potenz 3 von x, folglich das zweite Glied die Potenz $5=m+1.d$ von x enthalten; in diesem Glied nun ist $r=1$, also $f>r$, mithin der Coefficient dieses zweiten Glieds oder $R=0$ (657.) d. h. dieß zweite Glied, oder dasienige, welches x^5 enthält, fällt hier weg, wie man auch findet, wenn man nach (631.) verfährt. Setzt man nämlich den Werth von y in die Gleichung (A′), so giebt sich

I. $x^3 = 1.x^3$

II. $-a^2y = -a^2Ax^3 - a^2Bx^5 - a^2Cx^7 \ldots$

III. $+y^2x = +A^2x^6.x \ldots = +A^2x^7 \ldots$

IV. $+y^3 = +A^3x^9 \ldots$

also die ganze Reihe (A′) =

$$\left.\begin{matrix}1\\-a^2A\end{matrix}\right\}x^3 - a^2Bx^5 \left.\begin{matrix}-a^2C\\+A^2\end{matrix}\right\}x^7 + A^3x^9 \ldots$$

Da nun die Summe aller Theile eines ieden Coefficienten = 0 ist (624.) so ist klar, daß $-a^2B=0$ ist, wie man vorhin unmittelbar aus (657.) schlosse.

Auflö-

Auflösung der cubischen bestimmten Gleichungen.

§. 699.

$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ cubirt, giebt

$$x^3=A+3\sqrt[3]{A^2B}+3\sqrt[3]{AB^2}+B$$
$$=A+3\sqrt[3]{AB}.(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})+B$$

Nun ist

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=x$$

Also der vorige Ausdruck

$$x^3=3x\sqrt[3]{AB}+A+B$$

Hiermit die Gleichung

$$x^3=ax+b$$

verglichen giebt

$$a=3\sqrt[3]{AB}$$
$$=3\sqrt[3]{\beta}$$
$$b=A+B=\alpha$$

Aus $a=3\sqrt[3]{\beta}$

folgt $\left(\frac{a}{3}\right)^3=\beta=\frac{a^3}{27}$

Diese Werthe von α, β, in die Gleichung

$$z^2=\alpha z-\beta$$

gesetzt, giebt

$$z^2=bz-\frac{a^3}{27}$$

woraus sich die beiden Werthe für z oder A und B ergeben.

§. 700.

§. 700.

S. Anm. zu §. 699. (I. St. der Erläuter.) wo gewiesen worden, daß man auf den Rest $(m+n)^3-(m+n).a-b$ kommt; hier kommt x nicht mehr vor, da es nun in dem Divisor enthalten ist, so erhellet, daß es bei fortgesetzter Division nicht möglich ist, irgend einmal ein Produkt aus einem Glied des Quotienten in den Divisor zu erhalten, das dem Rest als Dividendo gleich wäre, oder es wäre auf diese Art nicht möglich, daß die Division irgendwo abbräche. Dieses muß aber nach (226) nothwendig geschehen, also kann man von dem letzten im Buche genannten Reste die Division nicht weiter mehr fortsetzen, oder dieser Rest muß $=0$ sein. Und daß er in der That $=0$ ist, sieht man so: aus 699. ist

$$x^3=(m+n)^3$$
$$=A+B+3\sqrt[3]{AB}.(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})$$

Aber $A+B=b$, $3\sqrt[3]{AB}=a$, und $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=m+n$, also

$$(m+n)^3=b+a.(m+n)$$

folglich

$$(m+n)^3-(m+n).a-b=0$$

Also ist der Quotient

$$x^2+(m+n).x+(m+n)^2-a$$

den die Division (699. I. St. der Erläuter.) giebt, vollständig, und man erhält also auf diese Art eine quadratische Gleichung

$$(\odot)\; x^2+(m+n)\,x+(m+n)^2-a=0;$$
deren Wurzeln die beiden übrigen Wurzeln der cubischen Gleichung
$$x^3-ax-b=0$$
sind.

Nun ist
$$a=3\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}$$
$$=3mn$$
also
$$(m+n)^2-a=m^2+2mn+n^2-3mn$$
$$=m^2+n^2-mn$$
also wird aus ($\odot$) diese:
$$x^2+(m+n).x+m^2+n^2-mn=0$$
oder
$$x^2+(m+n).x+(m+n)^2-3mn=0$$

Setzt man nun in 78
$$p=-(m+n)$$
$$q=-(m+n)^2+3mn$$
so wird daselbst aus L
$$x=-\frac{m+n}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{(m+n)^2}{4}+3mn-(m+n)^2\right)}$$
$$=\frac{-(m+n)\pm\sqrt{((m+n)^2-4.(m^2+n^2-mn))}}{2}$$
$$=(-(m+n)\pm\sqrt{(m^2+2mn+n^2-4m^2-4n^2+4mn)}):2$$
$$=\frac{-(m+n)\pm\sqrt{(-3m^2-3n^2+6mn)}}{2}$$

$$= \frac{-(m+n) \pm \sqrt{(-3 \cdot (m^2+n^2-2mn))}}{2}$$

$$= \frac{-(m+n) \pm (m-n) \cdot \sqrt{-3}}{2}$$

§. 701.

Dieß erhellet nämlich aus 699; 700; mit 250. verglichen.

§. 702.

In dem Werthe für x am Ende von 699. ist c entweder möglich oder unmöglich, nachdem $\frac{1}{27}a^3 < \frac{1}{4}b^2$ oder $> \frac{1}{4}b^2$ ist. Im ersten Fall setzt die Gleichung voraus, daß man aus einer zweitheiligen Grösse, deren eines Glied rational, das andere irrational ist, die Cubikwurzel angeben könne; im andern Fall aber, daß man aus einer zweitheiligen Grösse, deren erstes Glied (in 699 $\frac{1}{2}b$) möglich, das andere (in 699. $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)}$) unmöglich ist, die cubische Wurzel anzugeben wisse. Nur muß man noch bemerken, daß hier keine andere unmögliche Grösse als die $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)}$, wenn nämlich $\frac{1}{27}a^3 > \frac{1}{4}b^2$ ist, vorkommen kann; nun ist das Quadrat dieser unmöglichen Grösse $= \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3$ allemal möglich, also kommen hier keine andere unmögliche Grössen, als solche von der ersten Ordnung, deren Quadrat nämlich doch möglich ist, in Betrachtung. Unmögliche

Grös-

Grössen der zwoten Ordnung kann man nennen, die quadrirt unmögliche der ersten geben, als $\sqrt[4]{-1}$, weil $(\sqrt[4]{-1})^2 = \sqrt{-1}$ ist. Von den beiden vorhergehenden Fällen wird hier der letzte betrachtet, und gezeigt, daß in solchem Fall die cubische Wurzel allemal auf die im Buche gewiesene Art ausgedruckt werden könne. Vorausgesetzt nämlich, daß die Buchstaben die im Buche genannte Bedeutung haben, so läßt sich die Cubikwurzel aus einer solchen Grösse, deren eines Glied möglich, das andere unmöglich von der ersten Ordnung ist, allgemein so ausdrucken $\sqrt[3]{(K \pm \lambda)}$, so daß

$$\text{I. } \sqrt[3]{(K+\lambda)} = P + Q\sqrt{-1}$$
$$\text{II. } \sqrt[3]{(K-\lambda)} = P - Q\sqrt{-1}$$

Ob nun hier P, Q, möglich oder unmöglich sein, und was beide für Werthe haben, läßt sich so finden. $\sqrt[3]{(K+\lambda)}$ cubirt giebt $K+\lambda$, oder eine Grösse, von der ein Theil (K) möglich, und ein Theil (λ) unmöglich ist; also muß die Cubikwurzel so beschaffen sein, daß sie cubirt eine Grösse geben kann, deren Summe unmöglich ist, d. i. sie muß selbst etwas unmögliches enthalten; dadurch könnte man auf den Zweifel gerathen, ob vielleicht in dem Ausdruck (I.) nicht eine der beiden Grössen P, Q, auch unmöglich sein könne? den man sich aber leicht so heben kann. Man nehme einsweilen an, P und Q sein mögliche Grössen,

und suche nun zuvörderst aus I. einen Ausdruck für $\sqrt[3]{(K-\lambda)}$, der sich so ergiebt. Der Gleichung I. Grössen auf beiden Seiten cubirt, giebt

$$\text{M.})\ K+\lambda=P^3+3P^2Q.\sqrt{-1}-3PQ^2-Q^3\sqrt{-1}$$

Der mögl. Theil zur Link. ist K, zur Rechten P^3-3PQ^2
— unmögliche — — λ, — $3P^2Q\sqrt{-1}$
$-Q^3\sqrt{-1}$

Nun kann das Unmögliche nicht dem Möglichen gleich gesetzt werden, also giebt (M) folgendes

$$K=P^3-3PQ^2$$
$$\lambda=(3P^2Q-Q^3).\sqrt{-1}$$

Folglich $K-\lambda=P^3-3P^2Q\sqrt{-1}-3PQ^2-Q^3\sqrt{-1}$

Aber die Grösse zur Rechten ist der Cubus von $P-Q\sqrt{-1}$, also

$$K-\lambda=(P-Q\sqrt{-1})^3$$

und $\sqrt[3]{(K-\lambda)}=P-Q\sqrt{-1}$

welches die Gleichung II. ist, die also eine Folge der ersten ist, und für die Voraussetzung, daß P, Q, möglich sein, gleichfalls richtig ist, wenn es die erste ist.

In diesen beiden Gleichungen sind nun K und λ gegebene Grössen; es ist nämlich in 699. $K=\frac{1}{2}b$, $\lambda=\sqrt{(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{27}a^3)}$, wenn $\frac{1}{4}b^2<\frac{1}{27}a^3$, wo a und b gegebene Grössen sind. Demnach enthalten

ten die Gleichungen I, II, nur zwo unbekannte Grössen P, Q. die sich also aus ihnen finden lassen (207.) und zwar auf folgende Art. Es ist $Q^2 = e - P^2$, also $3PQ^2 = 3eP - 3P^3$. Dieß in die Gleichung

$$K = P^3 - 3PQ^2$$

gesetzt, giebt

$$K = P^3 - 3eP + 3P^3$$
$$= 4P^3 - 3eP$$

also

$$\odot) \quad \tfrac{1}{4}K = P^3 - \tfrac{3}{4}eP$$

Eben so folgt aus $e = P^2 + Q^2$

$$P^2 = e - Q^2$$

also

$$3P^2Q = 3eQ - 3Q^3$$

und

$$L = 3eQ - 3Q^3 - Q^3$$
$$= 3eQ - 4Q^3$$

mithin

$$\tfrac{1}{4}L = \tfrac{3}{4}eQ - Q^3$$

oder

$$☾) \quad -\tfrac{1}{4}L = Q^3 - \tfrac{3}{4}eQ;$$

Man hat also so wohl P als Q durch cubische Gleichungen ⊙ und ☾ bestimmt, also wenigstens einen möglichen Werth so wohl für P als Q, weil iede cubische Gleichung überhaupt drei Wurzeln hat, und die unmöglichen, wenn welche da sein sollten, allemal paarweise vorhanden sind. Sucht man nun aus diesen cubischen Gleichungen durch Versuche und andere oben (304 f.) gewiesene Mit-

tel einen Werth für P und Q, so hat man die Cubikwurzel der Grössen $K+\lambda$, und $K-\lambda$, also auch

$$1.)\ x = \sqrt[3]{(K+\lambda)} + \sqrt[3]{(K-\lambda)}$$

$$2,3.)\ x = \frac{\sqrt[3]{(K+\lambda)} \pm \sqrt[3]{(K-\lambda)}.\sqrt{-3}}{2}$$

wo sich nach gehöriger Substitution das Unmögliche aufhebt, und nur das Mögliche übrig bleibt. Dieß Verfahren dient nämlich, begreiflich zu machen, wie sich aus einem solchen Ausdruck

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}b + c)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}b - c)}$$

wenn c unmöglich ist, mögliche Werthe für x ergeben, nicht aber, die vorgegebene cubische Gleichung etwa auf solche Art bequem auflösen zu können. S. Anm. zu (705.)

§. 707. 708. 709.

Hat nämlich die cubische Gleichung (699.) zwo unmögliche Wurzeln, so ist c möglich, also läßt sich sowohl $\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}b + c)}$ als $\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}b - c)}$ in Zahlen berechnen, folglich auf diese Art die mögliche Wurzel, welche ausser den zwo unmöglichen noch übrig ist, finden. Sind hingegen die drei Wurzeln möglich, also c, m und n unmöglich, so hat es das Ansehen, als ließe sich in (699.) weder aus $\tfrac{1}{2}b + c$ noch aus $\tfrac{1}{2}b - c$ die Cubicwurzel ziehen, und in 700. erhielte man gleichfalls unmögliche

liche Werthe für x, und doch sollen die drei Werthe von x möglich sein vermöge 705. Es entsteht daher die Frage, ob auch das Verfahren (699.), wenn die cubische Gleichung drei mögliche Wurzeln hat, seine Anwendung habe, und ob der allgemeine Ausdruck für x (699.) auch für diesen Fall alle drei mögliche Wurzeln enthalte? Es kommt hierbei kurz darauf an, daß $\sqrt[3]{1}$ drei Werthe hat, nämlich

1.) 1.

2, 3.) $\dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Also ist

1.) $\sqrt[3]{A} = P + Q\sqrt{-1}$

2, 3.) $\sqrt[3]{A} = (P + Q\sqrt{-1}) \cdot \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$

An sich ist es einerlei, ob man $\pm$ oder $\mp$ setzt, also ist es auch für sich richtig, wenn man auf eben die Art

1.) $\sqrt[3]{B} = P - Q\sqrt{-1}$

2, 3.) $\sqrt[3]{B} = (P - Q\sqrt{-1}) \cdot \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$

setzt; aber andere Umstände bestimmen, ob, wenn man im ersten Fall willkührlich, wie verstattet ist, $\pm$ gebraucht, eben das, oder das umgekehrte $\mp$ im andern Fall zu nehmen sei? völlig, wie oben 165; 167. Man weiß nämlich, daß $\sqrt[3]{AB}$ möglich

lich ist, folglich muß man sich hiernach im Gebrauch der Zeichen richten, und die Probe giebt, daß man im Ausdruck für $\sqrt[3]{B}$ $\mp$ gebrauchen müsse, wenn man im Ausdruck für $\sqrt[3]{A}$ $\pm$ gesetzt hat, oder umgekehrt.

Von den Combinationen.

§. 742. 743.

Die Rechnung läßt sich in diesen und ähnlichen Fällen bequemer so führen:

I. Die Menge aller möglichen Combinationen zwoer Karten, die sich aus 40. nehmen lassen, ist

$$= \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$$

II. Die Menge derer Combinationen, die man durch 9. Karten, welche man in die Hände bekommt, erhält,

$$= \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$$

Also die Verhältnis der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit

$$= 36 : 780$$
$$= 1 : 21\tfrac{2}{3}$$

§. 744.

Ich glaube nicht, daß es nöthig wäre, hier auf die Ordnung, worin die Karten liegen können, zu sehen, weil diese eben keinen besondern Einfluß auf das hat, was man sucht. Es kommt nämlich blos darauf an, die Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, daß unter den n Karten, welche man von den liegenden 13 oben wegkauft, die 2 verlangten Blätter liegen, zur Unwahrscheinlichkeit zu finden, und dieß läßt sich kurz so bewerkstelligen. Hat man keine von den beiden Karten unter den 9. in der Hand, so müssen sie sich in denen noch übrigen $40 - 9 = 31$ Karten befinden. Dreizehn davon machen die liegen gebliebenen aus, also rechne man, wie Anm. zu 742. 743. so:

I. Die Menge aller möglichen Combinationen zwoer Karten, die sich aus 31 nehmen lassen, ist

$$= \frac{31 \cdot 30}{2} = 465$$

II. Die Menge der in den liegen gebliebenen 13 Karten befindlichen Combinationen

$$= \frac{13 \cdot 12}{2} = 78$$

Also ist die Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, daß sich die beiden Karten in den liegen gebliebenen be-

 finden,

finden, zur Unwahrscheinlichkeit = 78 : 465, oder fast 1 : 6.

III. Die Menge der in den n obern Karten enthaltenen Combinationen ist

$$= \frac{n.(n-1)}{2}$$

IV. Also der Quotient aus II. und III. =

$$\frac{n.(n-1)}{2} : 78 = \frac{n.(n-1)}{156}$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß die verlangten zwo Blätter unter den n Karten, welche man kauft, befindlich sind, der $\frac{n.(n-1)}{156}$te Theil von der Wahrscheinlichkeit, daß sie überhaupt unter den 13 liegenden sich befinden; diese letzte aber ist aus (II.) = 78 : 465, also die gesuchte

$$= \frac{n.(n-1)}{156} \cdot \frac{78}{465} = \frac{n.(n-1).78}{72540}$$

Für das im Buche gegebene Exempel wäre n=6, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{6.\ 5.\ 78}{72540} = \frac{234}{7245} = 1 : 31$$

V. Eben dieß giebt auch unmittelbar ein Quotient aus III. und I. nämlich

n. (n

$$\frac{n.(n-1)}{2} : 465$$

$$= \frac{n.(n-1)}{930}$$

lches eben der vorhin gefundene Ausdruck, nur ihler und Nenner durch 78 dividirt, ist.

VI. n kann nicht grösser sein, als 9; also ist größte Wahrscheinlichkeit, zwo verlangte Karn zu erhalten

$$= \frac{9.8}{930} = \frac{1}{12\frac{11}{12}}$$

er sehr nahe $\frac{1}{13}$

Die Lehre von den Combinationen hat selbst in ielen bürgerlichen Geschäften ihre Anwendung. Besonders äussert sich ihr Nutzen bei einem Instiut, das sich durch ganz Teutschland und vielen anern beträchtlichen Theilen Europens so allgemein nd beliebt gemacht hat, daß es wichtig genug ist, ie Anwendung dieser Lehre auf dasselbe etwas umtändlich zu zeigen. Dieß Institut ist das berüchigte Lotto di Genua, auf das ieder, der nur eine unglaubliche Allgemeinheit bedenkt, sogleich aufmerksam werden muß. Diese und die besondere Erfahrungen zeigen offenbar, daß überall die Lottoherren

herren die größten Vortheile und Einkünfte von diesem Spiel haben, wozu selbst die Bedürftigsten wegen des Scheins des Gewinstes, den sie zu hoffen haben sollen, das ihrige beitragen müssen. Sollte man glauben können, daß dergleichen Lottogesellschaften so allgemein von dem Glück verfolgt würden, und darin die Ursache ihres Vortheils suchen? So wenig dieses Jemand wird behaupten können, so offenbar ist es, daß der Grund davon in der innern Einrichtung des Spiels, also in der allzugeringen Hofnung der Interessenten zu gewinnen, und der unrechtmäßigen Verhältnis des Einsatzes zu dem, was gegen einen Treffer gezahlt wird, liegen muß. Mit diesem, was unmittelbar aus der Erfahrung folgt, stimmt die folgende Theorie genau überein, deren Ungrund also mancher interessirter Lottoherr zu zeigen sich vergebens bemühen wird.

1. Da sich das ganze Lottospiel auf einen Contractum emtionis spei, wie bekannt ist, gründet, so muß auch hier, wie bei allen Contracten, zwischen dem Lottoherrn und dem Lottospieler oder Einleger eine Gleichheit beobachtet werden, die sich daraus beurtheilen läßt, wenn beide in Ansehung des zu erwartenden Gewinnstes sowohl als Schadens einerlei Hofnung haben. Daraus läßt sich schon abnehmen, daß die rechtmäßige Einrichtung des Lottospiels von der Lehre von den Combinationen abhängt.

2. Ich

2. Ich kann hier als bekannt voraussetzen, was einfache und bestimmte Auszüge, Amben, Ternen, Quaternen und Quinen sind; nur so viel will ich hier erinnern, daß ich annehme, ein einfacher Auszug werde 15 mal, eine Ambe 275 mal, eine Terne 5000 mal, eine Quaterne 60000 mal und eine Quine 100000 mal bezahlt, weil dieß die gewöhnliche Einrichtung ist.

3. Da in allem nur 5 Nummern gezogen werden, und das, was für ieden Treffer gezahlt wird, allemal zum voraus bestimmt ist (II.), so ist klar, daß es für iede der 6 Spielarten eine gewisse Grösse geben müsse, über die der Gewinnst nicht steigen kann, wenn der Einsatz bestimmt ist. Die Anzahl von Nummern, die man bei ieder der 6 Spielarten besetzen muß, um diesen größten möglichen Gewinn erhalten zu können, heisse man die Gränze des Einsatzes. Diese kann verschieden sein, nachdem die Spielart verschieden ist.

4. Die Gränze des Einsatzes für die erste Spielart zu finden.

Aufl. Wegen der 5 Zahlen, die überhaupt gezogen werden, und für deren iede der Einsatz 15 mal zurückgegeben wird, ist die größte Ausbeute $= 5 . 15\, C = 75\, C$, wenn der einfache Einsatz $= C$ gesetzt wird. Es ist demnach für einfache Auszüge die gesuchte Gränze = 75, weil, wenn Jemand 75 einfache Auszüge, ieden mit C besetzt, die

Aus-

Ausbeute 75 C und der Einsatz 75 C genau einander aufheben.

5. Wenn Jemand auf Amben spielen will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, wie viele Amben in den Nummern, die er besetzen will, enthalten sind, indem für iede einzele darin enthaltene Ambe der Einsatz geschehen muß, welches nach denen im Buche vorgetragenen Sätzen ohne Schwierigkeit geschieht. Ist nämlich die Menge der zu besetzenden Nummern = n, so ist die Anzahl der darin enthaltenen Amben = $\frac{n.(n-1)}{1.2}$, oder jene = n + 1 gesetzt, giebt diese = $\frac{(n+1).n}{1.2}$. Man stelle sich eine Reihe Zahlen vor, wie 1, 2, 3 .... die nämlich nach ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen, so kann man eine andere mit dieser correspondirende Reihe, in der iedes Glied die Menge der Amben, Ternen ꝛc. die in dem correspondirenden Glied der ersten Reihe enthalten sind, anzeigt, eine Ambenreihe, Ternenreihe ꝛc. ꝛc. nennen. Aus dem, was eben gesagt worden, folgt, daß sich zwei zunächst auf einander folgende Glieder der Ambenreihe verhalten, wie

$$\frac{n.(n-1)}{2} : \frac{(n+1).n}{2}$$

$$= (n-1) : (n+1)$$

daß

daß sich also in dieser Reihe aus iedem vorhergehenden Glied das zunächst folgende durch die Regel detri ergiebt. So machen z. B. die beiden Zahlen 1, 2, eine Ambe; sucht man nun die Anzahl der in drei Nummern 1, 2, 3 enthaltenen Amben, so setze man n = 2, dieß giebt n − 1 = 1, n + 1 = 3, daß also in drei Nummern drei Amben enthalten sind. Setzt man nun ferner n = 3, so ergiebt sich die Menge der in vier Nummern enthaltenen Amben; es wird nämlich n − 1 = 2, n + 1 = 4, also

$$(n-1):(n+1) = 3:x$$

$$\text{oder} \quad 2 : 4 = 3 : x$$

also x oder die gesuchte Zahl = 6. Aber auch diese Rechnung ist nicht einmal nöthig, indem sich alles durch blose Addition verrichten läßt. Weil nämlich der Unterschied zweier in der Ambenreihe unmittelbar auf einander folgender Glieder dieser ist

$$\frac{n.(n+1)}{2} - \frac{n.(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2 + n - n^2 + n}{2}$$

$$= n;$$

so ergiebt sich hieraus folgender Schluß: wenn in einer Menge von n Nummern N Amben enthalten sind, so wird die Summe N + n die Menge der in (n + 1) Nummern enthaltenen Amben sein.

Z. B.

z. B. vier Nummern enthalten sechs Amben, wo $N = 6$ und $n = 4$, demnach ist die Menge der in fünf Nummern enthaltenen Amben $= N + n = 6 + 4 = 10$; und weil nun in $5 (= n)$ Nummern $10 (= N)$ Amben enthalten sind, so ist die Anzahl der in 6 Nummern befindlichen Amben $= N + n = 10 + 5 = 15$ u. s. f. Auf diese Art läßt sich eine Ambenreihe für alle Zahlen von 2 bis 90 ohne Mühe berechnen, die also beizufügen überflüßig sein würde.

6. Da an jedem Ziehungstag überhaupt fünf Nummern gezogen werden, worin $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Amben enthalten sind, und die gesammte Menge aller Zahlen, woraus die fünf gezogen werden, $= 90$ ist, worin $\frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$ Amben stecken, so erhellet, daß von den vorhandenen 4005 Amben nur der $\frac{10}{4005}$ te Theil $= \frac{1}{400,5}$ te Theil an dem Ziehungstag zum Vorschein kommen.

7. Die Gränze des Einsatzes für Combinationen zu finden.

Aufl. Die Ausbeute für eine Ambe ist $275 \cdot C$, also die höchste mögliche Ausbeute $= 10 \cdot 275 \cdot C = 2750 \cdot C$. Man suche also die Anzahl von Num-

Nummern, worin 2750 Amben enthalten sind, diese = n gesetzt giebt

$$2750 = \frac{n.(n-1)}{2}$$

oder $5500 = n^2 - n$,

statt dessen man hier, wo nur von ganzen Zahlen die Rede ist

$$5500 = n^2$$

setzen kann, und dieß giebt

$$n = 75;$$

daß also hier die Gränze des Einsatzes mit der für einfache Auszüge völlig einerlei ist.

8. Aus dem Bisherigen fließt, daß die Wahrscheinlichkeit, unter den erwählten Nummern einen Treffer zu haben, desto grösser sein müsse, je grösser die Anzahl von Nummern ist, die man besetzt hat. Diese Wahrscheinlichkeit, die nach der verschiedenen Menge der erwählten Nummern selbst verschieden ist, unterscheide man die besondere von der allgemeinen Wahrscheinlichkeit, mit der überhaupt jede gegebene Ambe an dem Ziehungstag zu hoffen ist, die also unveränderlich ist, und immer eben dieselbe bleibt, der Lottospieler mag viele oder wenig Nummern besetzen. Eigentlich zu reden ist jene von dieser nicht verschieden, daß nämlich die Hofnung zu gewinnen dadurch, daß man mehr oder weniger Nummern nimmt, auf keine Art verändert werden kann.

9. Die allgemeine Wahrscheinlichkeit, mit der irgend ein Treffer, Ambe, Terne u. s. f. am Ziehungstag zu hoffen ist, zu finden.

Aufl. Man theile die Menge aller der von gegebener Art in fünf Nummern enthaltenen Combinationen (z. B. wenn von Amben die Rede ist, die Menge aller in 5 Nrn enthaltenen Amben d. i. 10.) durch die Menge derer in 90 Nrn. enthaltenen, so erhält man allemal nothwendig einen Bruch, der die Verhältnis der Wahrscheinlichkeit zu treffen, zur Wahrscheinlichkeit zu fehlen, die = 1 gesetzt wird, anzeigt.

10. Es ist also die allgemeine Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu errathen $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ d. i. die affirmative Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu errathen, verhält sich zur negativen $= \frac{1}{18} : 1 = 1 : 18$.

11. Eben so giebt sich die allgemeine Wahrscheinlichkeit, eine Ambe zu treffen $= \frac{10}{4005} = \frac{1}{400,5}$ oder $= 1 : 400, 5$ in der erwähnten Bedeutung.

12. Die Anzahl von Nummern zu finden, die man nehmen muß, damit die besondere Wahrschein-

scheinlichkeit, eine Ambe zu erhalten, der entgegen gesetzten gleich werde.

Aufl. Man nehme den zehnten Theil aller in 90 Nrn enthaltenen Amben, alsdann ist nämlich die affirmative Wahrscheinlichkeit, den zehnten Theil der Amben, die am Ziehungstag gezogen werden, der negativen gleich. Man hat also die Gleichung

$$\frac{n.(n-1)}{2} = 400,5$$

oder $n^2 - n = 801$,

mithin $n = 29$.

Kürzer verfährt man so: man suche in den nach obigen Regeln verfertigten Ambenreihen das Glied 400, oder das ihm am nächsten kommt, so ist das ihm in der natürlichen Zahlenreihe zugehörige Glied die gesuchte Zahl.

13. Man hat n Nrn gewählt, und sucht nun die besondere Wahrscheinlichkeit, eine Ambe zu erhalten.

Aufl. Weil man Hofnung hat, den ebensovielten Theil y von denen 10 Amben zu erhalten, welche am Ziehungstage zum Vorschein kommen, den wievielten Theil die in den besetzten Nrn enthaltene Menge von Amben, in Absicht aller 4005 Amben, ausmacht, so hat man folgende Proportion

$$\frac{n.(n-1)}{2} : 4005 = y : 10$$

Daraus folgt

$$y = \frac{10. n. (n-1)}{2. 4005}$$

$$= \frac{n. (n-1)}{801}$$

14. Es ist klar, daß der wahrscheinliche Gewinn von der wahrscheinlichen Ausbeute verschieden ist, weil nicht die ganze Ausbeute, sondern der Unterschied zwischen Ausbeute und Einsatz der Gewinn ist.

15. Man hat n. Nrn zu Amben besetzt, und sucht nun den wahrscheinlichen Gewinn.

Aufl. Der ganze Einsatz ist =

$$\frac{n. (n-1)}{2} . C$$

Die wahrscheinliche Ausbeute $= \frac{n.(n-1)}{801} . 275. C.$

(§. 13.)

$$= \tfrac{275}{801} . n. (n-1). C$$

und jenes von diesem abgezogen giebt den wahrscheinlichen Gewinn

=

$$= \frac{275}{801} \cdot n.(n-1).C - \frac{n.(n-1)}{2} \cdot C$$

$$= \frac{550-801}{1602} \cdot n.(n-1).C$$

$$= -\frac{251}{1602} \cdot n.(n-1).C \ (\odot$$

der desto grösser oder kleiner wird, je grösser oder kleiner n wird, wenn übrigens C unverändert bleibt. Für n = 90 muß also dieser Verlust am größten werden, und für den Fall wird er

$$= \frac{251}{1602} \cdot 90.\ 89.\ C$$

$$= 1255.\ C$$

Eigentlich zu reden, ist aber dieß nicht mehr wahrscheinlicher, sondern gewisser Verlust, weil hier unter den besetzten Nummern nothwendig auch die gezogenen sind, folglich nichts ungewisses mehr übrig ist. Daher dient dieser Fall, die Richtigkeit der Methode, den wahrscheinlichen Gewinn zu finden, deutlich zu beweisen, wenn man für diesen besondern Fall die Rechnung anders führt, und eben das vorige findet. Weil nämlich hier alle 5 Nrn nothwendig mit errathen werden, so hat man die gewisse Ausbeute

$$= 10.\ 275.\ C$$

Der Einsatz ist $= 4005.\ C$

also der nothwendige Verlust

$$= (4005 - 2750).C$$
$$= 1255. C$$

völlig wie in der Gleichung (⊙)

16. Wir kommen nun auf die dritte Spielart, die durch Besetzung der Ternen geschieht. Die Menge aller in 90 Nrn enthaltenen Ternen ist $= \frac{90.\ 89.\ 88}{1.\ 2.\ 3} = 117480$, und die Menge der in n Nrn enthaltenen Ternen $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} = \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6} = \frac{x^3 - x}{6},$$

wenn man $n - 1 = x$ setzt.

17. Also sind zwei allgemeine in der Ternenreihe zunächst auf einander folgende Glieder, wenn die zugehörigen Glieder der natürlichen Reihe n, n+1, sind, diese

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{6}, \frac{(n+1).n.(n-1)}{6}$$

und ihre Differenz

$$\frac{((n+1)-(n-2)).n.(n-1)}{6}$$

$$= \frac{3.\ n.\ (n-1)}{6}.$$

= n.

$$= \frac{n. (n-1)}{2}$$

wodurch sich also aus jedem vorhergehenden Glied der Ternenreihe das zunächst folgende auf eine leichte Art ergiebt. Ist nämlich die Menge der in n Nrn enthaltenen Ternen $= N$, so ist die Menge der in $n+1$ Nrn enthaltenen $= N + \frac{n. (n-1)}{2}$. Es sei z. B. $n = 3$, so ist $N = 1$, folglich erhält man für $n+1=4$ die Menge der Ternen $= 1 + \frac{3.2}{2}$ $= 4$; und nun ergiebt sich für $n=4$, $N=4$, die Menge der in $n+1=5$ Nrn enthaltenen Ternen $= 4 + \frac{4.3}{2} = 10$ u. s. f. daß sich also auf diese Art eine Ternenreihe sehr leicht berechnen läßt.

18. Die Gränze des Einsatzes für Ternen zu finden.

Aufl. Fünf Nrn enthalten zehen Ternen, also ist die größte mögliche Ausbeute = 10. 5300 C; man suche demnach die Menge von Nummern, worin 53000 Ternen enthalten sind, d. i. man löse folgende Gleichung auf

$$53000 = \frac{x^3 - x}{6} \text{ oder}$$

$$318000 = x^3 - x$$

die aber von dieser

$$318000 = x^3$$

in so ferne blos von ganzen Zahlen die Rede ist, nicht verschieden ist; daraus folgt nun

$$x = \sqrt[3]{318000}$$
$$= 68$$

Folglich $n = x + 1 = 69$ (§. 16.) wie sich auch ergiebt, wenn man in der schon berechneten Ternenreihe die Zahl 53000, oder die ihr am nächsten kommt, aufsucht, da alsdann das in der natürlichen Zahlenreihe zugehörige Glied $= n$ ist.

19. Die allgemeine Wahrscheinlichkeit, mit der eine Terne zum Vorschein kommen wird, zu finden.

Aufl. Sie ist nach dem vorhergehenden =

$$\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$$

20. Den Werth von n, wie in (12) für Amben, hier für Ternen zu finden.

Aufl. Man verfahre völlig wie in (12), so hat man folgende Gleichung aufzulösen:

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} = 11748, \text{ oder}$$

$$\frac{x^3 - x}{6} = 11748$$

für

für $x = n - 1$, folglich

$$x^3 - x = 70488$$

oder, welches hier, wo nur von ganzen Zahlen die Rede ist, hinreicht

$$x^3 = 70488$$

also $x = 41$

und $n = x + 1 = 42$;

21. Die besondere Wahrscheinlichkeit, mit der aus n besetzten Nummern eine Terne gezogen werden wird, anzugeben.

Aufl. Die Menge der in n Nrn enthaltenen Ternen ist $\frac{x^3 - x}{6}$, und der in fünf Nummern enthaltenen = 10, also, wie in (13.)

$$\frac{x^3 - x}{6} : 117480 = y : 10$$

mithin $y = \frac{x^3 - x}{6 \cdot 11748}$

$$= \frac{x^3 - x}{70488}$$

oder $y = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{70488}$

welches dem Verhältnis der Gleichheit für $n = 42$, am nächsten kommt, wie nach 20 erfodert wird.

22. Den wahrscheinlichen Gewinn zu finden, wenn man n Nummern zu Ternen besetzt hat.

Aufl. Der Einsatz ist $\frac{x^3-x}{6}\cdot C$; die wahrscheinliche Ausbeute

$$= \frac{x^3-x}{70488}\cdot 5300.\ C$$

also der wahrscheinliche Gewinn

$$= \frac{x^3-x}{70488}\cdot 5300.\ C - \frac{x^3-x}{6}\cdot C$$

$$= \frac{1325.(x^3-x)}{17622}\cdot C - \frac{x^3-x}{6}\cdot C$$

$$= -\frac{1612.(x^3-x).\ C}{17622}$$

$$= -\frac{146,54.(x^3-x).\ C}{1602}$$

Folglich der wahrscheinliche Verlust

$$= \frac{146,54.(x^3-x).\ C}{1602}$$

23. Wir kommen zu den Quaternen; die Menge aller in 90 Nrn enthaltenen Quaternen ist $= \frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2554590$, und überhaupt

die

die Anzahl der in n Nrn enthaltenen

$$= \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{24}$$

24. Nennt man also zwei in der natürlichen Zahlenreihe zunächst auf einander folgende Glieder n, n + 1, so werden die zwei in der Quaternenreihe zunächst auf einander folgende Glieder sein

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{24} ; \frac{(n+1).n.(n-1).(n-2)}{24}$$

und ihre Differenz =

$$n.(n-1).(n-2).\frac{(n+1)-(n-3)}{24}$$

$$= n.(n-1).(n-2).\tfrac{4}{24} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{6}$$

$$= \frac{x^3-x}{6};$$

daß sich also auf diese Art eine Quaternenreihe sehr leicht berechnen läßt.

25. Die Differenz zweier in der Ternenreihe zunächst auf einander folgenden Glieder war $\frac{n.(n-1)}{2}$ = dem allgemeinen Ausdruck der in n Nrn enthaltenen Amben. Eben so ist hier die Differenz zweier in der Quaternenreihe zunächst auf

ein-

einander folgenden Glieder

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{6}$$

= den Ausdruck der in n Nrn enthaltenen Ternen, und so läßt sich zeigen, daß diese Ordnung allgemein zutrift.

26. Die Gränze des Einsatzes für Quaternen zu finden.

Aufl. Die Anzahl der in fünf Nummern enthaltenen Quaternen ist = 5, also die höchste Ausbeute = 5. 60000 C = 300000 C; man suche also in der berechneten Quaternenreihe das Glied auf, dem 300000 am nächsten kommt, so wird das in der natürlichen Zahlenreihe zugehörige Glied die gesuchte Gränze sein, die also hier = 53.

27. Die allgemeine Wahrscheinlichkeit für die Ziehung einer Quaterne zu finden.

Aufl. Aus 23 und 26 ist sie

$$= \frac{5}{2554590} = \frac{1}{510918}$$

28. Wenn y die oben angenommene Bedeutung hat, so ist hier

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{24} : 2554590 = y : 5$$

also

also $y = \frac{5 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{24 \cdot 2554590} =$

$= \frac{(x^3 - x) \cdot (x-2)}{12262032}$

für $x = n - 1$;

29. Den wahrscheinlichen Gewinn zu finden, wenn n Nrn zu Quaternen sind besetzt worden.

Aufl. Die wahrscheinliche Ausbeute ist

$$\frac{(x^3-x) \cdot (x-2)}{61310160} \cdot 60000\, C$$

$$= \frac{(x^3-x) \cdot (x-2) \cdot 6}{6131,0160} \cdot C$$

Den Einsatz $= \frac{(x^3-x) \cdot (x-2)}{120} \cdot C$ abgezogen, giebt den wahrscheinlichen Gewinn =

$$\left(\frac{6 \cdot (x^3-x) \cdot (x-2)}{6131} - \frac{(x^3-x) \cdot (x-2)}{120}\right) \cdot C$$

wenn man den kleinen Bruch 0, 016 aus der Acht läßt, also fast

$$= \left(\frac{(x^3-x) \cdot (x-2)}{1022} - \frac{(x^3-x) \cdot (x-2)}{120}\right) \cdot C$$

$$= \left(\frac{120 \cdot (x^3-x) \cdot (x-2) - 1022 \cdot (x^3-x) \cdot (x-2)}{122640}\right) \cdot C$$

= —

$$= -\left(\frac{902.(x^3-x).(x-2)}{122640}\right).C$$

$$= -\left(\frac{451.(x^3-x).(x-2)}{61320}\right).C$$

daß also hier allemal der wahrscheinliche Verlust $= \frac{451}{61320}.C.(x^3-x).(x-2)$ ist.

30. Die Differenz zweier in der Quinenreihe zunächst auf einander folgenden Glieder ist nach (25) $\frac{(x^3-x).(x-2)}{24}$, wornach sich also die Quinenreihe bestimmen läßt.

31. Die Gränze des Einsatzes für Quinen zu finden.

Aufl. Weil nur eine Quine am Ziehungstage zum Vorschein kommt, so ist die stärkste Ausbeute 100000 C, folglich dasienige Glied in der natürlichen Zahlenreihe, dessen zugehöriges in der Quinenreihe der 100000 am nächsten kommt, die gesuchte Gränze, die also hier = 28.

32. Der Kürze wegen wollen wir sogleich die sechste Spielart mit bestimmten Auszügen betrachten. Die Gränze des Einsatzes für bestimmte Auszüge giebt sich durch folgende.

Aufl.

Aufl. Die größte Ausbeute ist 75. 5 = 375; wenn nämlich alle fünf Nummern nach der Ordnung, wie sie sollen gezogen werden, besetzt werden. Es ist demnach auch hier die gesuchte Gränze, wie bei einfachen Auszügen = 75.

33. In diesem Fall giebt sich also obiges y durch folgende Proportion, deren zweites Glied die Summe aller möglichen bestimmten Auszüge enthält

$$n : 5.90 = y : 5$$

oder

$$n : 90 = y : 1$$

also

$$y = \frac{n}{90};$$

34. Den wahrscheinlichen Verlust zu finden, wenn n Zahlen besetzt sind.

Aufl. Die wahrscheinliche Ausbeute ist

$$= \frac{n}{90} \cdot 75. C$$

Der Einsatz aber = n. C

also der wahrscheinliche Verlust $(= 1 - \frac{15}{18}) \cdot n C$

$$= \frac{3}{18} n. C$$

$$= \frac{n. C}{6}$$

daß

daß also beide Spielarten mit bestimmten und unbestimmten Auszügen im Grunde nicht verschieden sind.

35. Sollte nun dieß Institut regelmäßig sein, und auf gehörigen Gründen beruhen, so muß es mit der bisherigen Theorie übereinstimmen. Die allgemeine Einrichtung ist diese: es werden allemal von 90 Nrn fünf gezogen, nun mag Einer so viele Nummern besetzen, als er will; so soll er allemal die Möglichkeit vor sich haben, so viel zu erbeuten, daß er wenigstens wegen seines Einsatzes keinen Verlust mehr hat; dieß ist die allgemeine Einrichtung vom Lotto; oder vielmehr diesem Zweck gemäß muß man die allgemeine Einrichtung des Lotto beurtheilen. Es folgt hieraus

I. Es muß keine Anzahl von Nummern geben, bei welcher der Verlust des Einlegers schon zum voraus nothwendig und unvermeidlich wäre.

II. Zwischen Einsatz und wahrscheinlicher Ausbeute muß ein beständiges Verhältnis sein, und zwar

III. das Verhältnis der Gleichheit.

Auf diesen dreien Sätzen muß sich die Einrichtung eines regelmäßigen Lotto gründen.

36. Aus

36. Aus der ersten Hauptregel folgt, daß es entweder

a) keine Gränze des Einsatzes geben müsse, oder, daß sie bei allen 6 Spielarten = 90 sei.

Oder, b) daß die Lottoherren ihren Collecteurn Ordre geben müssen, nicht mehr Nrn von Jemanden besetzen zu lassen, als es die Gränze des Einsatzes verstattete.

Aber dieser zweite Fall findet hier wegen der zwoten Hauptregel nicht statt, weil eben die Gränze des Einsatzes eine Folge des veränderlichen Verhältnisses ist.

37. Aus der zwoten Hauptregel folgt, daß wenn Einer alle 90 Nrn besetzte, und das durch alle 6, oder, wenn Quinen nicht mitgerechnet werden, durch alle fünf Spielarten, auch alsdann noch zwischen Einsatz und Ausbeute die bestimmte unveränderliche Verhältnis statt finden müsse, oder daß, wegen der dritten Regel, in diesem Fall die Ausbeute dem Einsatz gleich sein müsse. Nun ist in diesem Fall, wenn die Zahl, welche anzeigt, wie viel mal ieder Spielart der Einsatz zurück bezahlt wird, x heißt

I. Für einfache Auszüge
der Einsatz = 90. C
die Ausbeute = x. (5. C)

weil hier allemal die fünf Nummern errathen werden, also

$$90\,C = x \cdot 5\,C$$

und $$x = \frac{90}{5} = 18$$

d. h. einfache Auszüge müssen 18 mal zurück bezahlt werden.

II. Für bestimmte Auszüge giebt sich eben das.

III. Für Amben.

Der Einsatz $= 4005 \cdot C$
Die Ausbeute $= x \cdot 10\,C$
also $4005 = x \cdot 10$
und $x = 400{,}5$

d. h. Amben müssen 400 ½ mal zurück bezahlt werden.

IV. Für Ternen.

Der Einsatz $= 117480$
Die Ausbeute $= x \cdot 10\,C$
also $117480 = 10 \cdot x$
und $x = 11748$

d. h. Ternen müssen 11748 mal zurück bezahlt werden.

V. Für Quaternen

Der Einsatz $= 2554590$
Die Ausbeute $= x \cdot 5\,C$

also

also $2554590 = x . 5$

und $x = 510918$

d. h. Quaternen müssen 510918 mal zurück bezahlt werden.

Proben.

Für I. wenn z. B. 6 Nummern besetzt sind, so ist

Der Einsatz $= 6$ C

die wahrsch. Ausbeute $= 5 . \frac{6}{90} \cdot 18$ C

$= 6 .$ C $=$ dem Einsatz.

Für III. Der Einsatz $= 15$ C

die wahrsch. Ausbeute $= \frac{30}{801} \cdot 400, 5 .$ C

$= 15$ C $=$ dem Einsatz.

Für IV. Der Einsatz $= 20$ C

die wahrsch. Ausbeute $= \frac{120}{70488} \cdot 11748$ C

$= 20$ C $=$ dem Einsatz.

Für V. Der Einsatz $= 15$ C

die wahrsch. Ausbeute $= \frac{120 .\ 3 .\ 510918}{12262032} \cdot$ C

$= 15$ C $=$ dem Einsatz.

Auf diese Art ist also auf beiden Seiten sowohl des Einlegers, als des Lottoherrn der wahrscheinliche Verlust = dem wahrscheinlichen Gewinn = o, und es hat keiner vor dem andern was voraus. Daß

aber bei dem bekannten Lotto die hier festgesetzten Regeln gar nicht beobachtet werden, und daher die dabei angenommenen Werthe von x so sehr von denen hier gefundenen verschieden, und weit zu gering sind, fällt nun gleich in die Augen. Die itzige Einrichtung des Lotto ist von der Art, daß der ganze Vortheil auf die Seite des Lottoherrn fällt. Das, was man dem Einleger für seinen Einsatz verspricht, die Wahrscheinlichkeit zu beuten, erhält er nicht, indem auf seiner Seite, wie aus der bisherigen Ausführung erhellet, allemal der Verlust wahrscheinlich ist. Ob indessen derjenige, welcher durch das Einsetzen in das Lotto verliehrt, das Verlohrne wieder zurück fodern könne? ist eine Frage, die noch eine Entscheidung verdient, und die weder allgemein bejaht noch verneint werden kann. Man muß nämlich die beiden Hauptfälle wohl unterscheiden, ob der Einleger die Gränze des Einsatzes überschritten hat, oder nicht? Ist das erste, hat er nämlich z. B. $n > 75$ Nrn zu Amben besetzt, so hat er nothwendig einen Verlust

$$= \frac{n.(n-1)}{2} - \frac{75 . 74}{2} = \frac{n^2-(n+5550)}{2} C,$$ und

da nach der allgemeinen Absicht des Lottospiels jedem Einleger wenigstens die Möglichkeit des Gewinns übrig bleiben soll, so kann der Einleger einen Theil seiner Einlage $= \frac{n^2-(n+5550).C}{2}$ ohn-

strei-

streitig wieder fodern, oder wenn überhaupt g die Gränze des Einsatzes, γ die Anzahl der darin enthaltenen Amben oder Ternen u. s. f. wenn ferner $n > g$ ist, und ν die Menge der darin enthaltenen Amben u. s. w. anzeigt, so kann allemal der Theil der Einlage, welcher $= (\nu - \gamma) . C$ ist, zurückgefodert werden, alles übrige aber geht verlohren, weil im zweiten Fall allemal die Möglichkeit zu gewinnen, wenigstens keinen Verlust zu leiden, da ist, und die Einrichtung des Lottospiels übrigens vom Landesherrn allemal approbirt s in muß, welches sich indessen auf den ersten Fall nicht erstrecken kann.

Ex. Es hat Jemand 80 Nrn zu Amben besetzt, und drei Nummern errathen; man frägt, wie groß sein Verlust sein werde? Hier ist

	Der Einsatz 3160. C	$\nu = 3160$
	Die Ausbeute 825. C	$\gamma = 2775$
(☉)	Differenz = 2335. C	$\nu - \gamma = 385$
(☾)	Abgezogen $\nu - \gamma = 385$. C	
	Differenz = 1950. C	

Also ist der gesuchte Verlust nicht = 2335. C, sondern = 1950. C, indem 385. C. zurück gefodert werden können.

Hätte aber ein Landsherr ein Lottospiel nicht ausdrücklich approbirt, so würde ich auch alsdann

im zweiten Fall die Frage nicht schlechtweg verneinen, sondern dem Einleger so viel zurückzufodern erlauben, als er wegen der itzigen unregelmäßigen Einrichtung des Lotto verlohren hätte. Im Ex. wäre nach der hier verbesserten Einrichtung

Der Einsatz	3160. C
Die Ausbeute	1201, 5. C
Differenz =	1958, 5. C

So groß sollte also der Verlust sein; nun ist er aber aus (⊙)

	= 2335. C
davon abgezogen	1958, 5. C
giebt die Differenz	376, 5. C

welches den Theil der Einlage ausmacht, welchen der Einleger zurück zu fodern befugt wäre, wenn man die Sache nach der angegebenen bessern Einrichtung beurtheilen wollte, wie doch geschehen müßte, wenn ein Lotto vom Landesherrn nicht wäre approbirt worden. Auch zeigt das erwähnte Beispiel, daß es Fälle giebt, wo die von mir angegebene regelmäßige Einrichtung des Lotto dem Lottoherrn vortheilhafter ist, als die gewöhnliche. Nach der gewöhnlichen Verfassung könnte der Lottoherr mit Recht nicht mehr als 1950. C behalten, da ihm hingegen aus angeführten Gründen 1958, 5 also $8\frac{1}{2}$ C mehr gehörten. Dieß findet aber nur selten statt.

Ex.

Ex. Es hat Jemand mit 6 Nrn eine Ambe errathen, so ist

I. nach der gewöhnlichen Einrichtung		II. nach der hier angegebenen	
Der Einsatz	15. C	Der Einsatz	15. C
Die Ausbeute	275. C	Die Ausb.	400, 5. C
Differenz	260. C	Differenz	385, 5. C

und gehörten also dem Einleger eigentlich $125\frac{1}{2}$. C mehr, als er erhält.

Ex. Es erräth Jemand mit 24 Nrn. eine Ambe, so ist

nach I.		nach II.	
Der Einsatz	275. C	Der Einsatz	275. C
Die Ausbeute	275. C	Die Ausb.	400, 5. C
Differenz	= 0	Differenz	125. C

wo er nach II. noch 125. C gewönne, da er hingegen nach I. weder gewönne noch verlöhre, wiewohl bei dergleichen Fällen der Interessent doch auf weiter nichts bei den gewöhnlichen Lottospielen zu klagen befugt ist, als was ihm nach ihrer unregelmäßigen Einrichtung zukommt, weil diese allemal vom Landesherrn bestätigt ist. So viel erhellet indessen aus der bisherigen Ausführung, daß einem Landesherrn die Bestätigung eines solchen Lottospiels von der gewöhnlichen Art, das allen mathematischen und politischen Gründen zuwider läuft, äus-

serst abzurathen ist. Die Politik erfodert, daß man kein Institut, das zum allgemeinen Schaden der Unterthanen gereicht, dulde; daß aber die gewöhnliche Einrichtung des Lotto auf den Schaden der Interessenten abzwecke, ist hier deutlich genug aus mathematischen Gründen gezeigt worden. Warum folgen die Lottoherren nicht den Leibrentengesellschaften, die gleichfalls die Berechnung der Ausbeuten auf mathematische Gründe der Wahrscheinlichkeit bauen müssen, und es nun dem Schicksaal überlassen, ob ihnen solches Vortheil oder Schaden zuweist. Sie stellen ihre Rechnung so an, daß sie nach der mathematischen Wahrscheinlichkeit weder gewinnen noch verliehren werden, ob sie nun wirklich gewinnen oder verliehren, überlassen sie dem Ohngefähr; warum wollen Lottogesellschaften nicht eben so verfahren, und was hält sie ab, ihre Rechnung völlig eben so, und wie hier gewiesen worden ist, auf mathematische Wahrscheinlichkeit zu gründen, und nun ihren Verlust oder Gewinn geduldig zu erwarten? So lange die Lottospiele ihre gegenwärtige Einrichtung behalten, bleiben sie einem Lande schädlich, und dieß kann nicht anders, als durch die hier gewiesene Verbesserung, verhütet werden.

Der

Der Erläuterungen zwote Fortsetzung.

Vorerinnerung.

Der vorhergehende Aufsatz, als die erste Fortsetzung, war schon unter der Presse, da ich sahe, daß ich noch manches darin hätte ergänzen sollen, was ich in dem ersten Stück dieser Erläuterungen übergangen hatte. Anfänger werden am meisten zur Erlernung einer Sache gereizt, wenn sie sehen, daß sich Anwendungen davon machen lassen, und dieß ist der Grund, warum ich dergleichen in der ersten Fortsetzung beigebracht habe; ich hatte aber dabei nicht bedacht, daß dieß vorzüglich bei der abstrakten Lehre von den krummen Linien nöthig wäre; nun hat es zwar seine Richtigkeit, daß der Gebrauch dieser Linien schon ziemliche Kenntnisse aus der angewandten Mathematik voraussetze, indessen kann man doch Anfängern zu gefallen wenigstens im Vorbeigehen etwas davon erwähnen, und dieß ist hier geschehen. Auch habe ich ein Mittel gefunden, die Quadratur der Parabel und die Cubatur ihres Sphäroids ohne Rechnung des Unendlichen hier mit vorzutragen. Was ich in der vorhergehenden Fortsetzung von der Allgemeinheit der Formel für den höchsten Werth eines annui Legati gesagt habe, hat seine Richtigkeit, wenn der

beschwer=

beschwerte Erbe keine Legitimam zu fodern hat; für diesen Fall leidet die vorige Formel eine Aenderung, die ich hier beigebracht habe. Ausserdem wird man beim Durchblättern bald finden, daß ich noch einige Sätze im Buche selbsten zu erläutern gesucht habe, deren Anzeige hier überflüßig sein würde. In der Vorrede zum vorhergehenden Aufsatze hatte ich erinnert, daß ich die Leibrentenrechnung deswegen nicht beigebracht hätte, weil man schon beträchtliche Aufsätze davon hätte; indessen habe ich gefunden, daß die lesenswürdigen Abhandlungen davon den Anfängern wenig Dienste leisten, entweder weil sie gar nicht in ihre Hände kommen, oder, weil sie durch andere dabei mit erwähnte Dinge zu weitläuftig geworden sind. Um daher Anfängern wenigstens einen Begrif von diesen Dingen beizubringen, habe ich itzt doch für gut gefunden, sie hier, ohne mich mit fremden Federn zu schmücken, in der Kürze nur zu berühren, damit Phädrus, den ich erst spotten ließe, wieder für mich auftrete:

Si non ingenium, breuitatem adprobo;

da ohnehin die Kürze, in so weit man sich ihrer ohne Nachtheil der Deutlichkeit bedient, selbst dem Anfänger angenehm sein muß. Eben diese Liebe zur Kürze hat mich endlich bewogen, ausser einem Register, noch eine Tabelle über die ganze Kästnerische Analysis zu entwerfen, der sich Anfänger mit dem größten Nutzen bedienen können, nicht nur das

Gan-

Ganze bald zu übersehen, sondern auch mit sich selbst ein Examinatorium anzustellen, und ihre Kenntnis in der Algebra zu prüfen. Nur muß ich erinnern, daß ich die Tab. nicht völlig nach der Ordnung des erläuterten Buchs, sondern nach derjenigen, die mir für Anfänger die zuträglichste schiene, eingerichtet habe. Ich beschliesse nun hiermit die Erläuterungen über die Kästnerische Anal. endl. Gr. mit der Hofnung, nicht allein Anfängern dieß vortrefliche Buch so viel möglich erleichtert, sondern auch seine Brauchbarkeit so gewiesen zu haben, daß Anfänger künftig nicht mehr nöthig haben werden, mündlichen Unterricht in der Algebra zu suchen; und ich werde durch das überaus schmeichelhafte Urtheil, dessen mich auch der Nürnberger Herr Recensent in dem 35 St. der gel. Zeit. gewürdigt hat, noch in dieser Hofnung gestärkt. Mit Vergnügen würde ich nun die Erläuterungen über die Kästnerische Anal. des Unendl. bei eben dem Herrn Verleger einem andern überlassen, wenn es mir ein Solcher nur auf irgend eine Art bekannt werden ließe, weil ich itzo noch nicht sehe, ob ich in der Zukunft so viel Muße haben werde, auch die Erläut. über die Rechnung des Unendl. auszuarbeiten. Und da ich hieran zu zweifeln Ursache habe, so hoffe ich einige Nachsicht zu verdienen, daß ich von dem, was ich schon über einzele Materien in der Anal. des Unendl. aufgesetzt hatte, hier eine einzige Bemerkung mit vorgetragen habe. Anfän-

fänger, die in der Anal. des Unendl. an die Betrachtung der logarithmischen Linie, deren Erklärung ich (Erl. S. 231.) gegeben habe, kommen, werden sich vielleicht freuen, wenn sie hier eine Anwendung davon auf die Vermehrung der Menschen in einem Staate finden, die sie alsdann immer noch benutzen können. Hier wird ihnen eine solche Anwendung vermuthlich unerwartet sein, und die Neugierde, die Linie kennen zu lernen, von deren Subtangenten die Bevölkerung eines ganzen Staates abhängen soll, reizt sie vielleicht, sich selbst ins Unendliche zu wagen, wo man die Natur der Dinge, und ihre geheime Verbindungen so genau kennen lernt.

Der

Erläuterungen

zwote Fortsetzung.

---

§. 15.

Daß es falsch ist, eine unendliche Reihe, in der allemal iedes ungrade Glied mit sei-
1 nächstfolgenden 0 macht, $= \frac{1}{2}$ zu setzen, und dieses in allen Fällen, wo keine Ergänzung t findet, wegfallen muß, erhellet offenbar, wenn 1 andere Reihen, als die $1-1+1-1\ldots$ ist, achtet, und ihre Summe sucht; es sei z. B. ende Reihe gegeben

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}\text{ - - - -}$$

ist

$$\frac{1}{1.3} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3.5} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5.7} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\right)$$

f.

also

also ist die gegebene Reihe =

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\cdots\cdots\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}-\left(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{14}-\tfrac{1}{14}\cdots\cdots\right)$$

Hier macht nun in der Reihe, die von $\frac{1}{2}$ abgezogen wird, iedes ungrade Glied mit dem nächstfolgenden 0, also müßte, wenn die allgemeine Regel, daß $0+0+0\cdots\cdots=\frac{1}{2}$ wäre, auch dieser Reihe Summe $=\frac{1}{2}$ sein, und es wäre demnach

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}\cdots\cdots=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0$$

welches ungereimt ist; es folgt hieraus, daß die Reihe

$$\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{14}-\tfrac{1}{14}\cdots\cdots \quad (\mathfrak{C})$$

sich nicht so, wie die

$$1-1+1-1+1-1\cdots\cdots$$

$=\frac{1}{2}$ setzen läßt, und der Grund davon ist der, weil man bei jener keine Ergänzung annehmen kann, wie bei dieser. Nun ist (§. 14.) gezeigt worden, daß einer solchen Reihe Summe ohne diese Ergänzung $=0$ ist, also ist $\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\cdots\cdots$ nicht $=\frac{1}{2}$ sondern $=0$, und daher

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}\cdots\cdots=\tfrac{1}{2}-0=\tfrac{1}{2}$$

Es ist demnach die Betrachtung der Ergänzung das

das einzige Mittel, dessen man sich zu bedienen hat, den Quotienten

$$\frac{1}{1+1} = 1-1+1-1+1-1 \cdots$$

zu erklären. Leibniz erklärt die Sache so, weil die Reihe 1 − 1 + 1 − 1 ---- unendlich fortgehe, so könne man eben sowohl bei + 1 als bei − 1 stehen bleiben; im ersten Fall sei der Reihe Summe = 1, im letzten = 0, weil man aber weder den einen noch den andern Fall annehmen dürfe, so müsse man zwischen 1 und 0 die mittlere arithmetische Proportionalzahl nehmen, und dieß gäbe $\frac{1}{2}$. Wiewohl sich nun diese Erklärung auch leicht auf die Reihe C anwenden ließe, so scheint doch eine besondere Wirkung des Unendlichen dabei zum Grunde zu liegen, welches nicht angeht.

§. 18.

Irrationalzahlen sind an sich mögliche Grössen, aber ihre genaue Bestimmung ist an sich unmöglich. So ist $\sqrt{5}$ an sich eine wirkliche Grösse, weil man sich ihr nähern kann; nun ist sie < 3 und > 2, und zwischen 2 und 3 kann sie doch nicht liegen, weil eines uneigentlichen Bruchs Quadrat wieder ein uneigentlicher Bruch ist, also ist die Bestimmung von $\sqrt{5}$ unmöglich. Ich glaube aus diesem Grund noch immer mit grösserm Recht, als Fontenell halb unendliche Grössen behauptet,

Grössen, die halb möglich sind, anzunehmen, und hierher die Irrationalzahlen zu zählen.

§. 34.

Sie heissen auch eingebildete Grössen, obgleich einige zwischen unmöglichen und eingebildeten Grössen noch einen Unterschied gestatten, wie Euler in seiner vollst. Anl. zur Alg.

§. 37.

Ueberhaupt ist das allgemeinste Mittel, das Gesetz zu finden, das von den Gliedern einer Reihe fortgehender Zahlen gemeinschaftlich beobachtet wird, dieses, daß man dieser Glieder Unterschiede nimmt, und nun in dieser Differenzreihe wieder der Glieder Unterschiede und so fort, bis man auf eine Differenzreihe kommt, in der alle Glieder einander gleich sind. Dieß giebt alsdann ein Mittel ab, die Glieder der Hauptreihe durch blose Addition, so weit man will, fortzusetzen. Nur müssen Anfänger nicht denken, daß sie nun im Stande sein, für jede ihnen beschriebene Reihe sogleich ein allgemeines Mittel zu entdecken, die folgenden Glieder zu berechnen. Noch bis jetzo hat man keine Mittel gefunden, nur die Glieder der Reihe, welche die Primzahlen ausmachen, durch eine allgemeine Berechnung zu finden, und selbst die größten Meßkünstler unserer Zeiten, Euler, Lambert u. a. sind nur auf Erleichterung dieser Arbeit bedacht gewesen.

wesen. Die neueste hieher gehörige Schrift ist Hindenburgs Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen zu finden.

§. 50. (Seite 25. *)

S. unten §. 310.

§. 55.

S. Vorerinner. 8. in den Anfangsgr. der Arithm. Ueberhaupt behält eine Gleichung ihre Richtigkeit, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens ähnliche Veränderungen vornimmt, welches noch auf andere Arten, als durch die Multipl. Divis. Addit. und Subtraction, die zu beiden Seiten durch einerlei Zahl geschehen müssen, möglich ist. Ein Exempel davon habe ich in der vorigen Fortsetzung im Capitel von den geom. Aufg. bei der Berechnung der Vierecke, die den größten Inhalt haben, gegeben.

§. 59.

Ex. Ein Vater, der bei seinem Tode eine schwangere Frau hinterläßt, setzt den posthumum so zum Erben ein, daß, wenn es ein Sohn wäre, er noch halb so viel, und, wenn es eine Tochter wäre, solche noch einmal so viel, als die Mutter bekommen solle. Nun kommen Zwillinge, ein Sohn

 und

*) Weil eben der §. auch S. 29. vorkommt.

und eine Tochter zum Vorschein; wie muß die Erbschaft h getheilt werden? Die Mutter erhält x, also der Sohn $\frac{3}{2}$ x und die Tochter 2 x; dieß giebt

$$2x + \frac{3}{2}x + x = h$$

oder $\frac{9}{2}x = h$

also $x = \frac{2h}{9}$

§. 69.

Eine wichtige Anwendung auf die Löthigkeit der Soolen darf ich hier nicht vorbeigehen. Anfänger, die solche für unnöthig erachten, mögen sie überschlagen, die sich aber mit Salzwerkssachen abgeben, werden vielleicht einige Befriedigung dabei finden — ich rede blos von Anfängern, für die ich hier schreibe.

Um die Löthigkeit der Soolen zu erfahren, bedient man sich gewisser Spindeln, die man in 1, 2, 3, und höher löthiger Soole niedersinken läßt, da man die Stelle, bis wohin sie sich in die Soole senkt, mit 1, 2, 3, u. s. f. bezeichnet, welche alsdann die Grade der Löthigkeit ausdrucken; um aber zu dieser Verfertigung der Spindeln 1, 2, 3, u. f. löthige Soole zu erhalten, muß man zu 1, 2, 3, u. s. f. Lothen Salz nicht, wie gewöhnlich geschieht, 100, sondern 100−1, 100−2, 100−3 u. s. f. Lothe Wasser nehmen.

Es

Es ist gut, wenn man hierzu ein Gefäß nimmt, das ausser dem Raum für die Spindel noch hundert Lothe süßes Wasser hält. Heißt nun das Gewicht der mit Wasser angefüllten gläsernen Spindel P und der leeren p; setzt man ferner die Verhältnis der Schwere des Wassers zur eigenen Schwere des Glases = 1 : 3, 1, und der Spindel gegebene Länge = l, so ist des Gefäßes Durchmesser, wenn es rund ist,

$$= r\left(\frac{100 + P - p + \frac{p}{3,1}}{3,14 \cdot 0,448 \cdot l}\right)$$

wie jeder, der die Geometrie durchgangen hat, leicht nachrenen kann.

Um nun an einer Spindel die Grade der Löthigkeit nach einander zu bezeichnen, wird gewöhnlich mit einem Lth Salz u. 99 Lth W. der Anfang gemacht, das für jeden Grad versalzte W. wieder ausgegossen, und anderes von neuem versalzt. Statt dessen kann man sich aber des folgenden Verfahrens bedienen.

Aufg. Die Verhältnis der Mischung zu finden, um aus einer m löthigen und n löthigen Soole eine μ löthige zu erhalten.

Aufl. Thut man zu hundert Lth m löthiger Soole noch x. 100 n löthige, so sind in dieser Mi-

schung von $100 + x . 100 = (1+x) . 100$ Lth Soole überhaupt $m + x . n$ Lth Salz enthalten, und diese sollen auf jedes Hundert Lth Soole μ Lth Salz austragen. Daraus giebt sich diese Gleichung

$$m + x . n = (1 + x) . \mu$$
$$= \mu + x \mu$$

demnach

$$m - \mu = (\mu - n) . x$$

und

$$x = \frac{m-\mu}{\mu-n} \ (\odot$$

Also kommt zu hundert Lth m löthiger Soole $\frac{m-\mu}{\mu-n} . 100$ n löthige, oder zu einem Lth m löthiger Soole muß man $\frac{m-\mu}{\mu-n}$ n löthige gießen, um die μ löthige zu erhalten.

Hat man also zu einem Lth m löthiger Soole eine gegebene Anzahl z. E. k Lth n löthiger Soole gegossen, so giebt sich die Löthigkeit der dadurch erhaltenen μ löthigen Soole, so: weil man zu 1 Lth m löthiger Soole $\frac{m-\mu}{\mu-n}$ Lth n löthiger gießen muß, um die μ löthige zu erhalten, so hat man

$$k = \frac{m-\mu}{\mu-n}$$

also

also $k\mu - kn = m - \mu$
und $(k+1).\mu = m + kn$

Folglich $\mu = \frac{m+kn}{k+1}$

Schüttet man Wasser zu einer m löthigen Soole, so ist $n = 0$, und die Verhältnis des Gewichts Soole zum Gewicht Wassers, um durch Mischung eine schwächere Soole μ zu erhalten, ist

$$1 : \frac{m-\mu}{\mu} \quad (☾)$$

Auf diese Art kann man also aus einer Menge Salzes von 24 Lth auf einer Spindel alle Grade von 1 — 24 Lth abzeichnen, indem man nach und nach so viel süßes W. zuschüttet, als die Gleichung ☾ erfodert, da man nach der gewöhnlichen Art $1 + 2 + 3 ---- + 24 = 300$ Lth Salz dazu nöthig hat, wo also das Gesetz der Sparsamkeit den Gebrauch der Gleichung ☾ nothwendig macht.

Indessen setzt uns die Gleichung ☉ noch nicht in den Stand, aus einer schwachen Soole eine stärkere zu machen, oder zu Erhaltung einer gewissen Soole eine gegebene schwächere zu benutzen, so daß man die möglich geringste Menge Salz dazu braucht. Dieß zu bewerkstelligen, dient folgende Betrachtung: die Quantität m löthiger Soole, die man aus dem Gefäße schütten muß, um $100 - (m+1)$ Lth süßes W. zu behalten, heisse x, die also 1 Lth süßes W. hält, so ist

$$x : 1 \text{ Lth} = 100 : (100-m) \text{ Lth},$$

also $$x = \frac{100}{100-m} \text{ Lth}.$$

Um nun im Gefäße die hundert Lth m löthige Soole in hundert Lth n löthige zu verwandeln, muß sich im Gefäße 100 — n Lth süßes W. befinden; man muß also so viel m löthige Soole (x) aus dem Gefäße schütten, daß n — m Lth süßes W. dabei sich befinden; nun ist die Menge m löthige Soole, welche 1 Lth süßes W. enthält, oder $x = \frac{100}{100-m}$, also die hier gesuchte Menge $= (n-m) . \frac{100}{100-m}$ Lth; diese Menge aber enthält zugleich $\frac{m}{100}$. $(n - m) . \frac{100}{100-m} = \frac{mn-m^2}{100-m}$ Lth Salz, also muß man statt der ausgegossenen Soole wieder $(n-m) + \frac{mn-m^2}{100-m} = \frac{(n-m) . 100}{100-m}$ Lth zuwerfen, um hundert Lth n löthige Soole zu haben. Dieß giebt nun folgende allgemeine

Aufg. Hundert Lth m löthige in hundert Lth n löthige zu verwandeln, wenn $n > m$ ist.

Aufl.

Aufl. Man nehme $\frac{(n-m) \cdot 100}{100-m}$ Lth Soole aus dem Gefäße, und werfe darauf wieder eben so viele Lth Salz in dasselbe.

Anfänger glauben nun vielleicht vermögend zu sein, wenigstens über die Löthigkeit der Soolen in abstracto allemal richtig zu urtheilen; sie werden vielleicht die Frage: ob eine 12 löthige viermal so stark als eine 3 löthige sei? belachen, und ähnliche Fragen unter die domitianische zählen. Diesen zu Gefallen verstatte man mir, noch folgendes herzusetzen.

Die Stärke der Soolen oder ihre Reichhaltigkeit würde ihrer Löthigkeit proportional sein, wenn sie gleich dichte wären; da aber Soolen desto dichter sind, je höher ihre Löthigkeit ist, so wird z. E. eben der Raum von 12 löthiger Soole angefüllt, mehr als viermal so viel Salz enthalten, als der Raum mit 3 löthiger Soole angefüllt; also ist die Verhältnis der Stärke allemal grösser, als die Verhältnis der Löthigkeit, und aus einem Bassin, das 12 Zoll tief ist, müssen weniger als neun Zoll ausdünsten, wenn die darin befindliche 3 löthige 12 löthig werden soll.

Eigentlich sind also die gewöhnlichen Spindeln ihrem Zweck nicht gemäß; sie zeigen nicht, was sie zeigen sollen, die Verhältnis der Reichhaltigkeit verschiedener Soolen.

Wenn die großen latein. Buchstaben die Anzahl Ethe der in einem C. F. von der Löthigkeit, welche die ähnlichen griech. andeuten, enthaltenen Soole anzeigen, und die kleine latein. die zugehörige specifische Schwere dieser Soole, und die Soole p'' hoch in einem Bassin steht, so läßt sich die Frage: wie viel von der ν löthigen Soole abdünsten müsse, um die μ löthige zu erhalten? so beantworten: x sei die Menge der Zollen, wie hoch die Soole nach der Abdünstung noch steht, so ist

$$m : n = \frac{\nu}{\mu} p : x$$

also $$x = \frac{n \nu p}{m \mu}$$

Nun ist $n\nu = 100\,N$, $m\mu = 100\,M$, also

$$x = \frac{100\,N p}{100\,M}$$

$$= \frac{N p}{M}$$

daraus giebt sich, wenn die Anzahl der abgedünsteten Zolle = y ist,

$$y = p - x$$

$$= p - \frac{N}{M} p$$

oder $$y = p . \left(1 - \frac{N}{M}\right)$$

Auch

Auch giebt sich hieraus

$$p = \frac{y}{1 - N : M}$$

und $$M = \frac{N}{1 - y : p}$$ (♀

Hat man sich nämlich eine Tabelle aufgesetzt, worin der zu jedem Grad der Löthigkeit gehörige große latein. Buchstaben angegeben ist, so darf man in solcher nur den aufsuchen, der $= \frac{N}{1 - y : p}$; der dazu gehörige Grad der Löthigkeit ist alsdann $= \mu$, und so setzt uns die Gleichung ♀ in den Stand, allemal die Löthigkeit der überbliebenen Soole zu berechnen, wenn die Menge Zollen, die von p Zollen ν löthiger Soole abgedünstet sind, gegeben werden. Mehr mag ich hier von der Löthigkeit der Soolen, auf die mich die im Buche gemachte Anwendung auf die Löthigkeit des Silbers gebracht hat, nicht beibringen, und ich bin zufrieden, wenn man mich nicht hier schon einer Ausschweifung beschuldigt.

§. 78.

Der allgemeine Ausdruck einer unreinen quadratischen Gleichung ist

$$z^2 - pz = q \quad (H$$

Hieraus nach den gewöhnlichen Regeln die Quadratwurzel gezogen, giebt

$$\begin{array}{l|l} z^2 - pz & z - \frac{1}{2}p \\ z^2 & \\ \hline * - pz & \\ \quad 2z & \\ - pz + \frac{1}{4}p^2 & \\ \hline \quad * - \frac{1}{4}p^2 & \end{array}$$

also ist

$$z^2 - pz = (z - \tfrac{1}{2}p)^2 - \tfrac{1}{4}p^2$$

Dieß in H gesetzt, giebt

$$(z - \tfrac{1}{2}p)^2 - \tfrac{1}{4}p^2 = q$$

also $z - \frac{1}{2}p = \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$

und $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$

Wem wird es einfallen, sich Schwierigkeiten zu machen, wenn z^2 einen Coefficienten hat? Anfängern zur Aufmunterung, daß sie in kurzer Zeit weiter zu kommen im Stande sind, als manche Lehrer der Mathematik auf ansehnlichen Gymnasien, die sich sogar durch eigene Schriften, worin sie selbst solche Formeln vorbringen, legitimirt zu haben scheinen, und die selbst bei großen Meßkünstlern, die sie eines Briefwechsels würdigen, für Mathematiker passiren, erlaube man mir folgenden Brief von einem solchen Manne, den er einem jungen Menschen, der aus der Gleichung (§. 184.)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

diese $x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

nicht herausbringen konnte, zugeschickt hatte, nachdem er vorher schon in mehr als einem Dutzend Briefen lauter falsche Versuche gemacht hatte, die ihm sein Lehrling allemal gehörig zu widerlegen wußte.

* * *

„Sie schreiben mir abermal Zweifel, und zwar „zum Theil wiederhohlte, nach der von mir für de„monstrativ ausgegebenen Auflösung. Ich muß „also die ganze Rechnung, mit Beifügung theils „für bekannt angenommener, theils schon im vo„rigen Schreiben befindlicher Sätze, wiederhohlen. „Rechnung: Nro 1.) $ax^2 + bx = -c$. Da „nun diese Gleichung an sich etwas unmögliches „enthält (weil auf der einen Seite lauter positive „facta, auf der andern aber nur ein negativer „Buchstabe ist) so wird sie von den algebraicis „gleich o gemacht, durch Addition der negativen Grös„se. Daher setzt, wie Sie mir anfänglich schrieben, „Herr Kästner $ax^2 + bx + c = 0$. Ich sahe wohl, „daß es eine unreine oder unvollkommene quadrati„sche Gleichung war, hatte aber den Vortheil, a von x^2 „und x von bx wegzuschaffen, vergessen, den ich „doch wußte, als ich 1737. in meine problemata

„arith-

„arithmetica die quadratische Regel setzte *). Ich
„konnte mich auch des auctoris nicht erinnern, aus
„welchen ich sie genommen, wie ich ihn bis diese
„Stunde noch nicht weiß. Indessen fand ich bey
„Poëtio p. 438. §. 801. den Satz: so man aus
„dem homogeneo comparationis ab den einen
„factorem $a = x$ setzt, so lasse sich die ganze Glei-
„chung damit hinaus dividiren — Dieses nun wen-
„dete ich auf die gegebene Gleichung $ax^2 + bx = -c$
„an, so entstunde Nro 2.) $x^2 + b = -\frac{c}{a}$. Sie
„fragen, wie kann man $x = a$ setzen? ich antworte
„nochmals erstlich, wenn beide Theile einer bino-
„mischen Wurzel bekannt sind; so ist das vollkom-
„mene Quadrat $= a^2 + 2ab + b^2$

„Zweytens. Wenn man aber nur $ax^2 + bx$
„siehet, so ist es ein unvollkommenes oder unreines
„Quadrat. Denn die Theile der Wurzel sind x
„und $\frac{1}{2}$ b, dasselbe aber sollte $x^2 + 2xb + b^2$ sein,
„wenn es vollkommen wäre. Es steht aber Nro 1.
„nur $ax^2 + 1. xb$. Es fehlt also $(\frac{1}{2} \frac{1}{2} b)^2$ zu
„Er-

*) Ein Newton verdient Bewunderung, daß er in seinem hohen Alter seine schwersten Schriften, die er ehemals aufgesetzt hatte, nicht mehr verstande — aber der Verfasser dieses Briefs verdient Mitleiden, daß er hier den Newton pueriliter zu imitiren sucht —

„Ergänzung des Quadrats, dagegen ist x^2 mit a, „als einer bekannten Grösse, multiplicirt, und steht „nur (1. x. $\frac{1}{2}$ b =) x b. Wenn man nun, wie „bei Forschung der Natur der Gleichungen geschie- „het, x einer bekannten Grösse gleich setzt, als hier „x = a, so findet man die Eigenschaft der Gleichung, „und kann also durch die Division mit x = a, das a „von x^2 und b x auf der einen Seite wegbringen, „auf der andern aber wird c mit der bekannten „Grösse a dividirt. Die Eigenschaft der Glei- „chung $a x^2 + b x = - c$ ist, daß das Quadrat des „ersten Theils der Wurzel mit a (= x der Wurzel „selbst) multiplicirt worden, dagegen der zweyte „Theil der Wurzel (= $\frac{1}{2}$ b) mit 2. x multiplicirt „(= 2 x. $\frac{1}{2}$ b = 1. x. b) = x b (oder b x) ist. „Dividirt man nun Nro 1. mit x = a, so muß „Nro 2. entstehen, auch durch Addition $\frac{1}{4} b^2$ auf „beiden Seiten entstehen, Nro 3.) $x^2 + b + \frac{1}{4} b^2$

„$= \frac{1}{4} b^2 - \frac{c}{a}$ Nro 4.) $x + \frac{1}{2} b = \sqrt{\left(\frac{1}{4} b^2 - \frac{c}{a}\right)}$;

„hierbei schreiben Sie, eine richtige Folge, wenn „x = a und weiter = 1. Ich setze hinzu, wenn „a = (x oder dem ersten Theil der Wurzel) wenn „ a, sage ich, der Coefficient bey x^2 und x mit dem „zweyten Theil der Wurzel (hier = $\frac{1}{2}$ b) mit die- „sem zweyten Theil 2 mal sage ich 2 mal genom- „men multiplicirt (= 1. b = 2. $\frac{1}{2}$ b = 1 b) macht, „und wenn b mit a multiplicirt = 1. b in der gan-

zen

„zen Gleichung. Denn ein einmal angenommener „Werth eines Buchstabens darf in der weitern Rech„nung nicht geändert werden. In andern Fällen, „da x^2 keinen Coefficienten hat, geht es nach Hr. „Clemm pag. 120. sqq. welchen Sie hoffentlich „verstehen werden. Der Coefficient bei x^2 kann „aber auch eine andere Grösse, als a = x sein, wenn „nicht x zugleich der Coefficient des 2ten Theils der „Wurzel ist – No 5) $x + \frac{1}{2} b = r\left(\frac{1. b^2 - 4ac}{4a}\right)$;

„No 6.) $x + \frac{1}{2} b = \frac{r(1. b^2 - 4ac)}{2a}$; Nro 7.)

„$x = \mp \frac{1. 1. b}{2} + r \frac{(1. b^2 - 4ac)}{2a}$. Nro 8.)

„$x = \mp \frac{2. 1. b}{2. 2. a} \mp \frac{r(b^2 - 4ac)}{2a}$ Nro 9.)

„$x = \frac{\mp b \mp r(b^2 - 4ac)}{2a}$ —“

Mir schwindelt, ich mag also Zeug, worin kein Menschenverstand ist, nicht länger abschreiben. Für einen Mathematikverständigen verdiente es eine Stelle im vade mecum.

Wie glücklich sind Gymnasien, die Männer zu Lehrern haben, wie Böckmann, Hellwig u. a. die sich freilich durch ihre Schriften besser legitimirt haben, als der Verfasser des hergesetzten Briefs.

§. 110.

§. 110.

Ex. Caius schickt dem Titius a Thl. wovon jeder $\frac{1}{m}$ Thl. für Porto kostet; dieß Porto ist er nicht zu bezahlen schuldig, und weil es ihm also Titius doch wieder geben müßte, so will er es gleich an der Summe a abziehen; wie viel muß also Caius wegen dieses Abzugs noch an den Titius schicken?

Das Porto für a ist $\frac{a}{m}$, also die Differenz $= a - \frac{a}{m}$; schickt aber Caius nur $a - \frac{a}{m}$, so hat er nicht das Porto von a, sondern von $a - \frac{a}{m}$ bezahlt, also muß er dem Titius das Porto von $\frac{a}{m}$, oder $\frac{a}{m} : m = \frac{a}{m^2}$ ersetzen, und diesem also schicken

$$a - \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2}$$

aber nun muß wieder Caius für das zugelegte $\frac{a}{m^2}$ das Porto bezahlen $= \frac{a}{m^2} : m = \frac{a}{m^3}$, und dieß zieht er dem Titius wieder ab, schickt diesem also nur

$$a-\frac{a}{m}+\frac{a}{m^2}-\frac{a}{m^3}$$

und so wird das, was Caius dem Titius schicken muß, durch die unendliche Reihe

$$a-\frac{a}{m}+\frac{a}{m^2}-\frac{a}{m^3}+\frac{a}{m^4}\ldots\ldots$$

ausgedruckt werden, folglich ist der Abzug, den Caius wegen des Porto machen kann

$$\frac{a}{m}-\frac{a}{m^2}+\frac{a}{m^3}-\frac{a}{m^4}\ldots\ldots$$

$$=a.\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}-\frac{1}{m^4}\ldots\ldots\right)$$

$$=a.\frac{1}{m+1}=\frac{a}{m+1}\text{ Thl.}$$

§. 146.

S. unten §. 727 folgg.

§. 147.

S. §. 752.

Zusätze zu den Anwendungen der Lehre von den geom. Progressionen.

I. Von den Leibrenten.

1. Die Rechte erlauben Niemanden, mehr als 5. p. c. Zinsen von einem Capital zu nehmen; wer

wer also höhere Zinsen nehmen wollte, müßte sich den Ueberschuß über 5. p. c. vom verliehenen Capital von Jahr zu Jahr abrechnen lassen, so daß endlich das Capital und mit ihm das Recht des Gläubigers erlöschet. Wollte demnach Jemand auf ein Capital von 1000 Thl. jährlich 70. Thl. Zinsen haben, so müßte er die Anzahl von Jahren, wie lange er solche zu fodern habe, gehörig berechnen, daß er keine unerlaubte Zinsen erhielte.

Nach solcher Berechnung kann man von jedem Capital so hohe Zinsen, als man will, nehmen, oder mit andern Worten, man kann sich für ein gewisses Capital eine jede gegebene jährliche Rente kaufen, nur muß die Anzahl von Jahren, wie lange eine solche jährliche Rente zu bezahlen ist, dem Gesetz, daß keine Zinsen, die über 5 p. c. laufen, verstattet werden, gemäß sein.

Wer nämlich gegen ein Capital a eine Zeitrente z verlangt, fodert eigentlich für dieß Capital a die Zinsen eines Pfands p, dessen jährlicher Ertrag z ist, d. h. er fodert für ein gegebenes Capital a ein bestimmtes Pfand p, und sucht nun die Anzahl von Jahren n, wie lange er p benutzen kann, oder wie lange er z, das ich $= \frac{p}{b}$ setzen will, zu fodern hat, und wir erhalten also auch hier die obige allgemeine Formel

$$pe^n - p = ae^n,$$

die wir in der Berechnung bei dem pacto antichret. §. 9. fanden. Nur wollen wir hier zur Bequemlichkeit, um die jährliche Rente z selbst in die Rechnung zu bekommen, bz statt p setzen, dieß giebt uns folgende Fundamentalgleichung für die Berechnung der jährlichen Renten

$$bze^n - bz = ae^n$$

oder, weil $e = \frac{b+1}{b}$ ist,

$$z.\frac{(b+1)^n}{b^{n-1}} - bz = \frac{a.(b+1)^n}{b^n} \quad (Q.$$

2. Der gewöhnliche Fall, da die Formel Q benutzt wird, ist der, da die Anzahl von Jahren nebst dem Capital a zugleich bestimmt sind, und daraus die jährliche Rente gesucht wird. Man erhält für solchen Fall aus (Q)

$$b.\left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^n - 1\right).z = a.\left(\frac{b+1}{b}\right)^n$$

also

$$z = \frac{a.\left(\frac{b+1}{b}\right)^n}{b.\left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^n - 1\right)} \quad (R$$

Der Werth von n kann übrigens hier noch von einem ungewissen Ausgang abhängen, so daß bei solchem

chem Contract eine gewisse Wettung zum Grunde liegt. Beruht er auf des Käufers, der nämlich die jährliche Rente gegen das Capital a kauft, wahrscheinlicher Lebensdauer, so heißen die hiernach berechneten Renten insbesondere Leibrenten; in allen übrigen Fällen heißen sie Zeitrenten, da denn n gewöhnlich als gewiß gegeben ist.

Ex. Es verlangt Jemand gegen ein Capital von 1600 Thl. eine Zeitrente auf 20 Jahre, die Zinsen zu 5 p. c. gerechnet; wie groß ist hier z?

Es ist a = 1600 Thl. n = 20, b = 20; also b + 1 = 21, und

$$l\,21 = 1,3222193$$

Abgezogen $l\,20 = 1,3010300$

giebt $l\,\frac{21}{20} = 0,0211893$

und multipl. mit $n = 20$

giebt $l\left(\frac{b+1}{b}\right)^n = 0,423786$

Dieß unter der Characteristik 3 aufgesucht, giebt

$$\left(\frac{b+1}{b}\right)^n = 2,653$$

und $a.\left(\frac{b+1}{b}\right)^n = 4244,8$

welches der Zähler aus (R) ist;

Nun ist ferner

$$\left(\frac{b+1}{b}\right)^n - 1 = 1,653$$

also $b.\left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^n - 1\right) = 33,06$

welches der Nenner ist, dieß giebt in R

$$z = \frac{424480}{3306}$$

$$= 128,39 \text{ Thl.}$$

3. Verlangte man eine Zeitrente $= z$, auf n Jahre, und suchte nun das dafür zu zahlende Capital a, so wäre aus R

$$a = \frac{b.\left(\left(\frac{b+1}{b}\right)^n - 1\right).z}{\left(\frac{b+1}{b}\right)^n}$$

$$= b\,z.\left(1 - \left(\frac{b}{b+1}\right)^n\right)$$

Ex. Es sei $b = 20$, $n = 20$, und $z = 128,39$ Thl. so ist

$$l\left(\frac{b}{b+1}\right) = -0,0211893$$

also $l\left(\frac{b}{b+1}\right)^n = 20.(-0,0211893)$

$$= -0,4237860$$

diesen Logarithmen bejaht genommen, und unter der Character. 3. aufgesucht, giebt die Zahl 2,653, also ist

$$l\left(\frac{b}{b+1}\right)^n = l\left(\frac{1}{2,653}\right)$$

und $$\left(\frac{b}{b+1}\right)^n = \frac{1}{2,653} = \frac{1000}{2653},$$

mithin

$$1 - \left(\frac{b}{b+1}\right)^n = \frac{1653}{2653}$$

und $bz = 2567, 8$, folglich

$$a = \frac{1653 \,.\, 2567,8}{2653}$$

$$= 1599, 91 \text{ Thl.}$$

welches dem Werth von a = 1600 Thl. für die viele dazu erfoderliche Rechnungen mit Zahlen, die nicht in völliger Schärfe das sind, was sie sein sollen, nahe genug kommt.

4. Wer sich Renten kauft, thut solches gewöhnlich auf seine ganze Lebenszeit; daher ist bei dem Gebrauch, den man von solchen Formeln macht, am häufigsten n die wahrscheinliche Lebensdauer dessen, der die Rente kauft; um also diese Rechnung auf die Leibrenten anzuwenden, muß man die wahrscheinliche Lebensdauer jedes Menschen

von bestimmtem Alter kennen. Lebte z. B. ein Mensch von 25 Jahren wahrscheinlich noch 30 Jahre, und verlangte gegen ein bestimmtes Capital eine Leibrente, so müßte in der Gleichung (R) $n = 30$ gesetzt werden. Aber auf einen einzelen Menschen wird wohl Niemand leicht Leibrenten verkaufen, es geschieht daher fast allemal, um bei einer großen Menge von Menschen desto weniger zu fehlen, auf eine ganze Gesellschaft von bestimmtem Alter, daß es also nur noch drauf ankommt, den Werth von n für eine solche ganze Gesellschaft der Wahrscheinlichkeit gemäß festzusetzen, denn daß Aemilius Macer und Vlpian uns hier nichts vorschreiben können, wird jeder auch ohne mein Erinnern glauben.

5. Man kann hier auf zweierlei Rechnungen gerathen, die unter dem Namen der Halleyschen und Deparcieuxschen bekannt sind. Die wahrscheinliche Lebensdauer eines jeden Einzelen ist nämlich nicht mit der Lebensdauer der ganzen Gesellschaft einerlei, wie solches Hr. Lambert in seinen Beiträgen durch die Anwendung der Rechnung des Unendl. vortreflich aus einander gesetzt hat. Halley hat die wahrscheinliche Lebensdauer dadurch bestimmt, daß er aus gesammleten Registern gesehen hat, in was für einem Jahr von Leuten von gegebenem Alter nur noch die Hälfte am Leben ist, und offenbar wird auch das wahrscheinliche Alter eines

Menschen dadurch richtig bestimmt. So lebt z. B. von 10000 Neugebohrnen nach 22, 6 Jahren nur noch die Hälfte, oder die Anzahl der Lebenden ist vor dieser Zeit größer, als die Zahl der Verstorbenen; nach 22,6 Jahren ist die Zahl der Verstorbenen schon grösser, als die Zahl der noch Lebenden; da sich nun jeder wahrscheinlich unter der größten Anzahl befindet, so ist klar, daß bei jedem der 10000 Neugeb. vor 22, 6 Jahren das Leben, und nach 22, 6 der Tod wahrscheinlicher ist. Indem aber 22, 6 Jahre voll werden, ist die Anzahl der Verstorbenen mit der Zahl der noch Lebenden einerlei; da ist es also bei jedem der 10000 Neugeb. eben so wahrscheinlich, daß er sich unter der Zahl der Verstorbenen befindet, als es wahrscheinlich ist, daß er sich unter der Zahl der noch Lebenden befindet. Folglich ist das wahrscheinliche Alter der Neugeb. 22, 6 Jahre. So erhellet also, daß die von Halley berechnete wahrscheinliche Lebensdauer in der That das wahrscheinliche Alter eines jeden Menschen angiebt. Aber daraus folgt noch nicht, daß im Durchschnitt, einer in den andern gerechnet, jeder von 10000 Neugeb. 22, 6 Jahre, oder alle zusammen 226000 Jahre durchleben werden. Dieses will sagen, das mittlere Alter einer ganzen Gesellschaft ist allemal von dem wahrscheinlichen eines jeden Einzelen verschieden, und es ergiebt sich solches, wenn man die Summe aller Jahre, welche z. B. hier die 10000 Neugeb. zu durch-

leben haben, durch die Zahl der Personen d. i. hier durch 10000 dividirt. Auf diese Art berechnet Deparcieux die wahrscheinliche Lebensdauer eines Menschen, und erhält dadurch 29 Jahre für Neugeb. die also von der Halleyschen, welche nur 26 giebt, in diesem Fall sehr weit abweicht. Beide, Halley und Deparcieux glauben auf solche Art die wahrscheinliche Lebensdauer für ieden Menschen von gegebenem Alter zu berechnen, so nämlich, daß Halley seine Methode allein, und Deparcieux nur die seinige für richtig hält. Seyberth *) verwirft die Deparcieuxsche Art ganz; er zeigt nämlich erst, daß die Berechnung der Leibrenten sich auf das wahrscheinliche Alter des Leibrentenkäufers gründe, beweißt hierauf, daß die Halleysche Methode das wahrscheinliche Alter gebe, und schließt hieraus S. 66. weil die Deparcieuxsche Methode andere Zahlen giebt, daß diese leztere untauglich sei **).

Es ist aber dieser Schluß zu übereilt, und es läßt sich überhaupt keine von beiden Arten schlechtweg verwerfen; es hat jede in besondern Fällen ihre Anwendung. Aus dem Gesagten folgt nämlich, daß

*) De reditu annuo praesertim vitali, Tontina et fiscis viduarum Liber. p. 62 sqq.

**) Mit folgenden Worten: Quum itaque prioris (Sc. Halleyanae) methodi probabilitas satis evicta sit, alteram eodem iure nemo sane adhibebit.

daß die H. Methode das wahrscheinliche Alter einer jeden einzelen Person von 1000 oder 10000 u. s. f. richtig bestimmt; sie würde aber die wahrscheinliche Summe aller Jahre, welche die ganze Gesellschaft von 10000 zusammen durchlebt, unrichtig angeben; hingegen bestimmt die D. Methode die wahrscheinliche Summe aller Jahre, welche die ganze Gesellschaft zu durchleben hat, richtig, aber das wahrscheinliche Alter jeder einzeln Person aus dieser Gesellschaft unrichtig. Beide Methoden sind also an sich richtig, nur müssen sie in verschiedenen Fällen gebraucht werden; wo man nämlich zu wissen verlangt, wie viele Jahre eine große Anzahl von Personen zusammen genommen wohl leben mögte? da gilt nur die D. Methode, und wo man zu wissen verlangt, wie lange eine einzele oder nur wenige Personen wahrscheinlich wohl leben mögten? da gilt nur die Hallensche. Nun muß der Leibrentenverkäufer oder die Casse bei ihrer Rechnung Rücksicht auf die Summe aller Portionen, die sie überhaupt wahrscheinlich zu zahlen hat, nehmen; und da die Anzahl dieser Portionen mit der Summe aller Jahre, welche die ganze Gesellschaft durchlebt, einerlei ist, so muß sich offenbar die Casse der Dep. Methode bedienen. Seyberth und Herr Prof. Karsten *), wenn ich es wagen darf einen

*) Lehrbegr. der gesammten Mathem. II. Th. §. 232. f.

einen teutschen Archimed eines Irrthums zu beschuldigen, irren daher, indem sie hier den Gebrauch der Halleyschen Rechnung empfehlen. Wollen sich aber nur einzele, oder doch nur wenige Personen, leibrenten kaufen, so darf man sich dabei nicht der Deparcieuxschen, sondern der Halleyschen Zahlen bedienen. Es lassen sich also nun in allen Fällen die Leibrenten leicht berechnen, wenn man nur in der Formel R die gehörigen Werthe von n substituirt. Es würde überflüßig sein, hier noch eine Tabelle von den Halleyschen und Deparcieuxschen Zahlen herzusetzen, da ich ohnehin schon weitläuftiger, als ich Willens ware, geworden bin, und überdas auch nur die Absicht hatte, Anfängern von dieser Rechnung einen hinlänglichen Begrif beizubringen. Ich erinnere nur noch, daß die beste hierher gehörige Schrift die angeführte Seybertische ist, wo man auch die meisten hierher gehörigen Schriften sorgfältig angeführt finden wird.

II. Von der Berechnung der Falcidiä.

Ich habe schon in der Vorerinnerung erwähnt, daß die in der ersten Fortsetzung für den größten Werth des Legati annui, womit ein Testator seinen Erben beschweren darf, gefundene Formel

$$\lambda = \frac{3\,h}{4.\left(\frac{e^{m+1}-1}{(e-1).\,e^{q+m}}-1\right)} \quad (Q$$

wo h nicht die ganze Erbschaft, sondern nur den Theil derselben, worin der beschwerte Erbe eingesetzt worden ist, bedeutet, nicht allgemein genug sei, und dieß bedarf hier noch einer nähern Erörterung. Man muß nämlich die beiden Fälle unterscheiden, ob der beschwerte Erbe ausser der Falcidia noch eine Legitimam zu fodern habe, wovon es den Rechten gemäß gewisse Fälle giebt, oder nicht? Für den letzten Fall hat die Formel (Q) ihre Richtigkeit; auf den ersten aber läßt sie sich nicht anwenden, und für diesen Fall muß sie also hier noch anders eingerichtet werden. Es sei nämlich $m = 4\frac{1}{2}$, und k sei eine ganze Zahl, so ist die Anzahl der vom Testator hinterlassenen Kinder, die eine Legitimam zu fodern haben, allemal

$$= m \pm (k + \tfrac{1}{2})$$

Hinterläßt er z. E. 6 Kinder, so ist $k = 1$
5 — — $k = 0$
4 — — $k = 0$

u. s. f. Nun ist die Erbportion eines Kindes, wenn die ganze Verlassenschaft H heißt

$$= H : (m \pm (k + \tfrac{1}{2}))$$

Da nun die Gesetze verordnet haben, daß wenn vier oder weniger Kinder vorhanden wären, eines jeden Legitima ein Drittheil, und wenn fünf oder mehr Kinder da wären, eines ieden Legitima die Hälfte von dem sein solle, was jedes bekommen hätte, wenn der Vater ohne Testament gestorben wäre,

so

so ist die Legitima eines Kindes für das obere Zeichen

$$= \frac{H}{2\,(m + k + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{H}{2\,m + 2\,k + 1}$$

$$= \frac{H}{10 + 2\,k}$$

Für das untere Zeichen

$$= \frac{H}{3.\,(m - (k + \frac{1}{2}))}$$

$$= \frac{H}{12 - 3\,k}$$

also allgemein für beide Zeichen, wenn die Legitima l heißt

$$l = \frac{H}{11 \mp 1 - \frac{1}{2}\,k \pm \frac{5}{2}\,k}$$

oder $$l = \frac{H}{11 \mp 1 - \frac{1 \mp 5}{2} \cdot k}$$

Diesen Werth von l kann der Erblasser gar nicht beschweren, und das Kind nimmt ihn frey hinweg, da ich hier die Socinische Cautel nicht in Betrachtung ziehe; man ziehe ihn also von dem Theil, in wel-

welchen das Kind zum Erben ernannt ist d. i. von h ab, so bleibt

$$h - \frac{H}{11 \mp 1 - \frac{1 \mp 5}{2} . k}$$

zum Rest; und da wegen der Falcidia hiervon dem Kind ein Viertheil frei bleiben muß, so ist der größte Werth des Legats, womit ein Vater sein Kind beschweren kann,

$$= \tfrac{3}{4} h - \frac{3 H}{44 \mp 4 - (2 \mp 10) . k}$$

und dieß statt $\frac{3}{4}$ h in (Q) gesetzt, giebt für diesen Fall den größten Werth des annui Legati

$$= \frac{\tfrac{3}{4} h - \frac{3 H}{44 \mp 4 - (2 \mp 10) . k}}{\frac{e^{m+1} - 1}{(e-1) . e^{q+m}} - 1} \quad (R$$

da dann das obere Zeichen auf den Fall geht, da fünf oder mehr, und das untere auf den, da vier oder weniger Kinder vorhanden sind.

Ex. Ein Vater hinterläßt ein Vermögen von 30000 Thl. Eines von seinen sechs Kindern das er zu 8000 Thl. eingesetzt hat, beschwert er mit einem Legato annuo, man sucht zu dem Ende, um zu sehen, ob dieß Legatum annuum nicht zu

groß

groß ist, den größten Werth eines solchen Legats aus R.

Hier ist $k = 1$, $h = 8000$, und $H = 30000$, also $\frac{3}{4} h = 6000$, und weil hier über vier Kinder vorhanden sind, also das obere Zeichen gielt, so ist der Zähler in (R)

$$= 6000 - \frac{90000}{40 + 8 . 1}$$

$$= \frac{288000 - 90000}{48}$$

$$= \frac{198000}{48}$$

$$= 4125$$

Nun sei $m = 28$ und $q = 5$, so ist

$$l\, e^{m+1} = 29 . l \tfrac{21}{20} = 0,6244897, \text{ also}$$

$$e^{m+1} - 1 = 4,212 - 1$$

$$= 3,212$$

$$l\, e^{q+m} = 33 . l \tfrac{21}{20} = 0,6992469$$

dessen zugehörige Zahl

$$e^{q+m} = 5,003$$

Folglich

$$(e - 1) . e^{q+m} = \frac{5,003}{20}$$

$$= 0,2501$$

dieß

dieß giebt den Nenner in L.

$$= \frac{3,212}{0,2501} - 1$$

$$= \frac{32120}{2501} - 1$$

$$= \frac{32120 - 2501}{2501}$$

$$= 11,84$$

also der ganze Werth des Legati annui

$$= \frac{4125}{11,84} \text{ Thl.}$$

$$= 348,39 \text{ Thl.}$$

und mehr ist demnach das Kind jährlich dem Legatario abzugeben nicht verbunden.

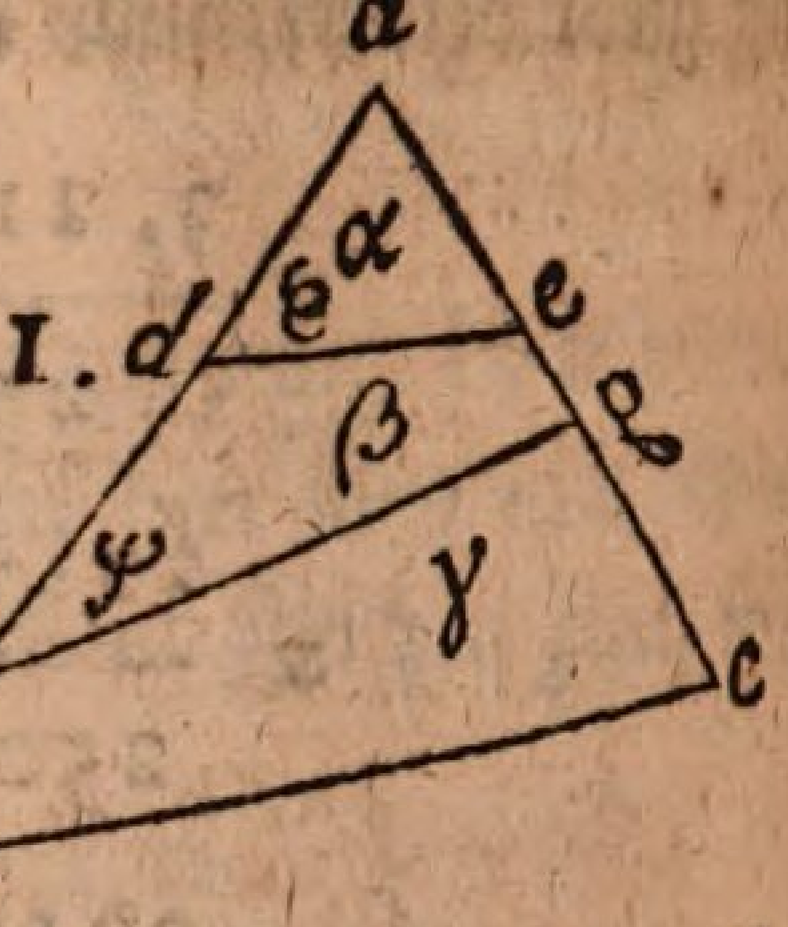
Geometrische Aufgaben.

Ich habe geglaubt, daß es nicht ganz überflüßig sein würde, hier noch eine Anwendung der analytischen Trigonometrie auf die Theilung der Drei – und Vierecke beizubringen; Anfänger werden wenigstens dabei Gelegenheit finden, auch die Brauchbarkeit allgemeiner Formeln beim gewöhnlichen Feldmessen zu erkennen, und solche selbst anwenden lernen.

 1. Ein

1. Ein Dreieck, wie a b c durch grade Linien so zu theilen, daß die Theile in einer gegebenen Verhältnis stehen, und die Theilungslinien mit einer von des Dreiecks Seiten, durch welche die Theilungslinien gehen, einen bestimmten Winkel machen.

Fig. 1.



Aufl. Aus des Dreiecks Inhalt und der gegebenen Verhältnis der Theile, suche man die Grösse derselben. Wäre z. B. das Dreieck a b c in drei Theile zu theilen, die sich gegen einander verhielten, wie l, m, n, so suche man hieraus die Grösse dieser Theile, für die ich α, β, γ, setzen will. Ist nun ferner der Winkel a d e, den die erste Theilungslinie d e mit a b macht, $= \varphi$, so ist

$$\alpha = \frac{ad.\ de.\ \sin \varphi}{2}$$

$$= \frac{ad.\ \frac{ad.\ \sin a.}{\sin aed} \cdot \sin \varphi}{2}$$

$$= \frac{ad^2.\ \sin a.\ \sin \varphi}{2 \sin (a + \varphi)}$$

Folg-

Folglich

$$ad^2 = \frac{2\alpha . \sin(a+\varphi)}{\sin a . \sin\varphi}$$

und

$$ad = \sqrt{\left(\frac{2\alpha . \sin(a+\varphi)}{\sin a . \sin\varphi}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\alpha . (\sin a . \cos\varphi + \cos a . \sin\varphi)}{\sin a . \sin\varphi}\right)}$$

$$= \sqrt{(2\alpha . (\mathrm{Cot}\,\varphi + \mathrm{Cot}\,a))}$$

Eben so erhält man

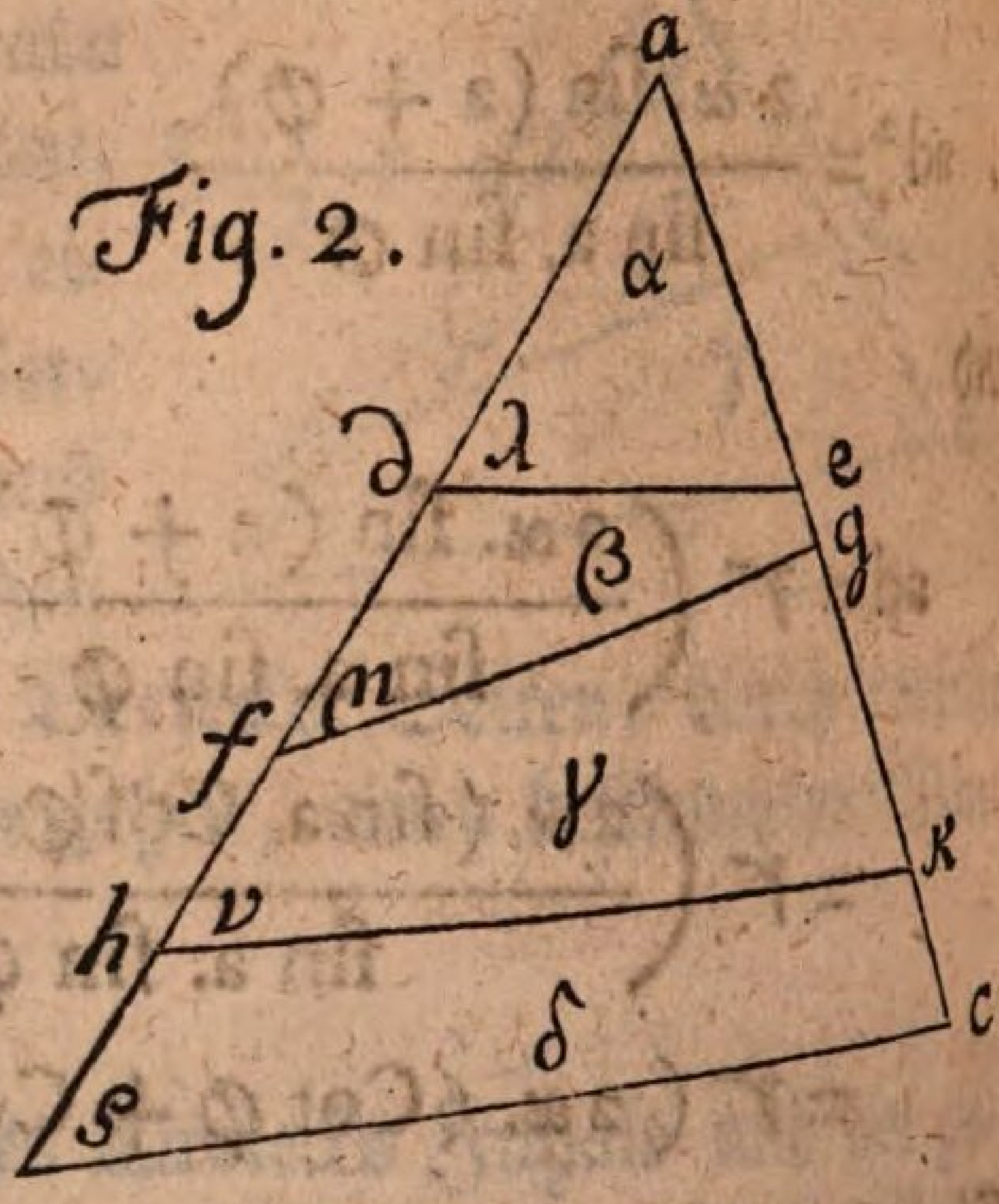
$$af = \sqrt{(2(\alpha+\beta) . (\mathrm{Cot}\,\psi + \mathrm{Cot}\,a))}$$

Oder, wenn überhaupt β = der Summe der ersten von des Dreiecks Scheitel an gerechneten n abgeschnittenen Theile, und φ = dem Winkel gesetzt wird, den die nte Theilungslinie mit der Seite ab macht, so giebt die vorige Rechnung, wenn man die Linien ad, af, u. s. f. die Entfernungen der Theilungslinien de, fg u. s. f. vom Scheitel a nennt, und in dieser Bedeutung der nten Theilungslinie Entfernung vom Scheitel = b setzt, folgende allgemeine Gleichung

$$b = \sqrt{(2\beta . (\mathrm{Cot}\,\varphi + \mathrm{Cot}\,a))}$$

Ex. Man soll das Dreieck abc in vier Theile theilen, die sich gegen einander, vom Scheitel nach der Grundlinie gerechnet, verhalten, wie die Zahlen 8, 7, 16, 19, ferner soll $\lambda=60^\circ$, $\mu=40^\circ$, $\nu=55^\circ$ sein, und a sei $=50^\circ$, $\varrho=52^\circ$; endlich sei ab = 12 R. und bc = 10 R. so ist der Inhalt des $\triangle$ abc = 60.0,788 = 47,28 R;

Fig. 2.



also der Inhalt von $\alpha = \frac{8 \cdot 47,28}{50} = 7,56$. R.

$$\beta = \frac{7 \cdot 47,28}{50} = 6,61.$$

$$\gamma = \frac{16 \cdot 47,28}{50} = 15,13.$$

$$\delta = \frac{19 \cdot 47,28}{50} = 17,96.$$

Demnach

$$ad = \sqrt{(15,12 \cdot 1,41645)} = 4^\circ 6' 2''$$

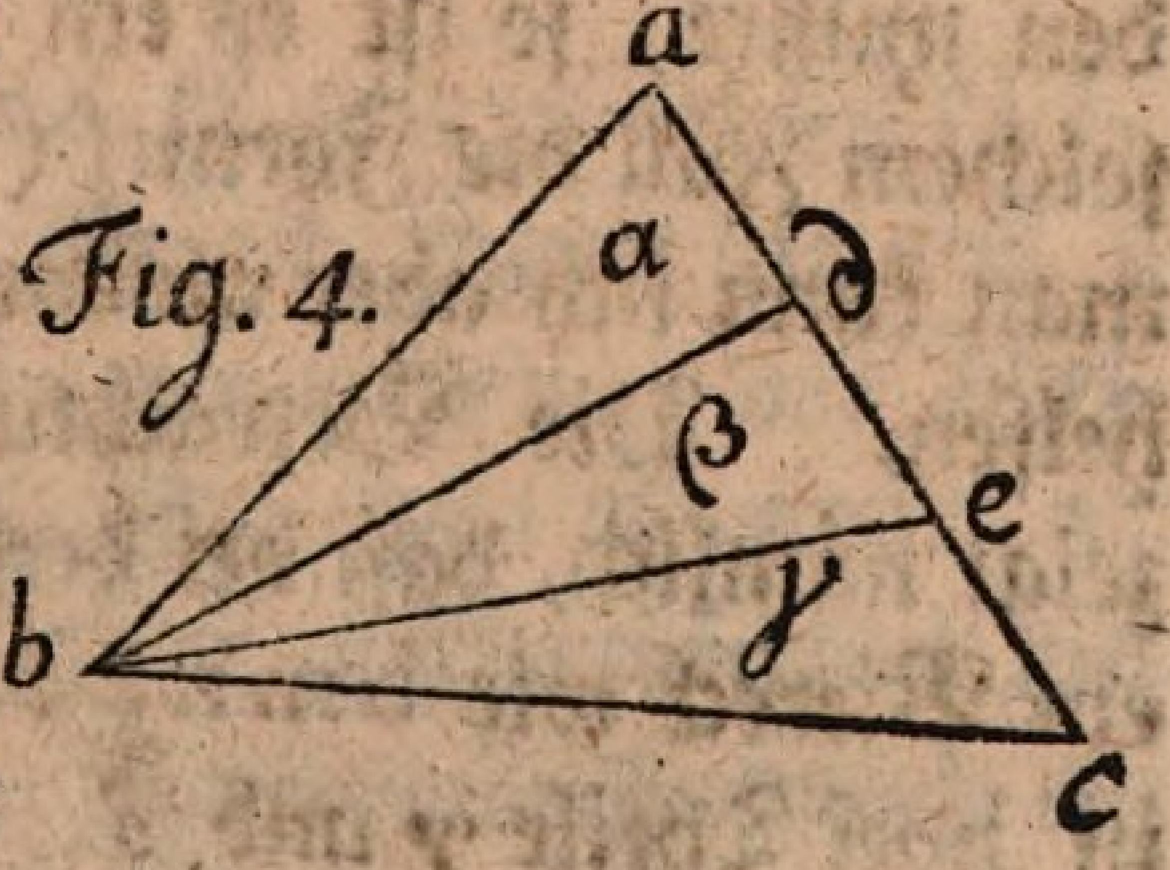
af

$$af = \sqrt{(28,34 \cdot 2,03085)} = 7^\circ\,5'\,8''$$
$$ah = \sqrt{(58,6 \cdot 1,53931)} = 9^\circ\,4'\,9''$$

2. Auf solche Art läßt sich auch jedes $\triangle$ nach einer gegebenen Verhältnis durch Linien theilen, die mit einer Seite des Dreiecks parallel sind; alsdann ist nämlich $\lambda = \mu = \nu = \varrho$.

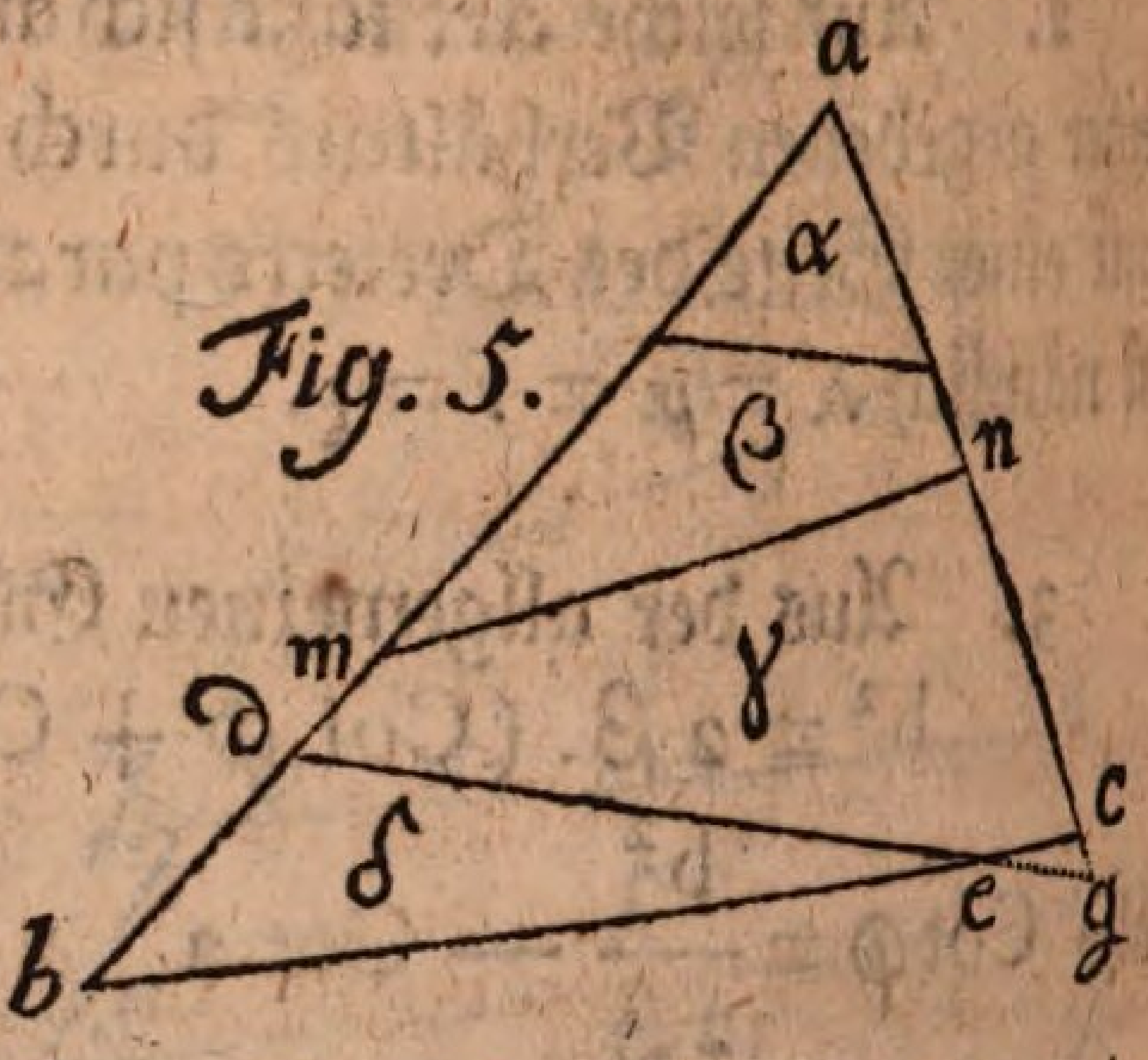
3. Aus der allgemeinen Gleichung (1.) folgt
$$b^2 = 2\beta.(\text{Cot}\,\varphi + \text{Cot}\,a)$$
also $$\text{Cot}\,\varphi = \frac{b^2}{2\beta} - \text{Cot}\,a$$
Sind also auf der Seite ab Punkte gegeben, aus welchen man das Dreieck nach einer gegebenen Verhältnis in verschiedene Theile zerlegen soll, so giebt diese Gleichung den Winkel an, unter dem man die Theilungslinien aus den gegebenen Punkten ziehen muß.

4. So ließe sich auch (fig. 4.) das Dreieck abc durch Linien, die alle aus dem Scheitelpunkt b gehen, nach ieder gegebenen Verhältnis theilen, wenn es nicht kürzer wäre, blos die Seite ac nach der Verhältnis der Theile α, β, γ, u. s. f. zu theilen.



5. Was bisher von der Theilung der Dreiecke ist gesagt worden, ist, wie aus der Art, wie die allgemeine Gleichung (1.) entstanden ist, erhellet, nicht ganz allgemein. Wollte man z. B. das △ abc (fig. 5.) in vier Theile nach einer gegebenen Verhältnis theilen, und man erhielte für die

Fig. 5.



Theilungslinie die de, die erst verlängert die ac in g schneidet, so wäre es offenbar falsch, diese de für die dritte Theilungslinie anzunehmen, weil nicht adeca = ½ sin ade × ad. de, wie doch die Gleichung (1.) voraussetzt. Kommt man also bei einer solchen Theilung auf eine Theilungslinie, wie hier auf de, welche die andere Seite ac nicht selbst trift, sondern zu diesem Ende erst verlängert werden müßte, so ist es ein sicheres Zeichen, daß in solchem Fall die Formel (1.) nicht anwendbar ist; man kann sich aber alsdann leicht auf folgende Art helfen. Die Betrachtung der Figur (fig. 5.) zeigt nämlich, daß bei dergleichen Fällen zuletzt noch ein Viereck wie bmnc übrig bleibt, welches noch in zwei Theile γ und δ, deren Grösse bekannt ist, getheilt werden muß, welches sich so thun läßt.

Es

Es soll der Inhalt von dbe = δ sein, man hat also

$$\tfrac{1}{2}\,bd\,.\,be\,.\,\sin b = \delta$$

ist nun überdas ade gegeben, so weiß man auch bde, und b ist ohnehin bekannt, folglich auch deb, und daher die Verhältnis der Seiten bd und be gegeben, nämlich

$$bd : be = \sin bed : \sin bde = \sin(ade - b) : \sin ade$$

Folglich $$be = \frac{bd\,.\,\sin ade}{\sin(ade - b)}$$

Dieß in die Gleichung für δ gesetzt, giebt

$$\frac{bd^2\,.\,\sin ade\,.\,\sin b}{2\sin(ade - b)} = \delta$$

mithin

$$bd = \sqrt{\left(\frac{2\delta\,.\,\sin(ade - b)}{\sin ade\,.\,\sin b}\right)}$$

$$= \sqrt{(2\delta\,.\,(\text{Cot}\, b - \text{Cot}\, ade))}$$

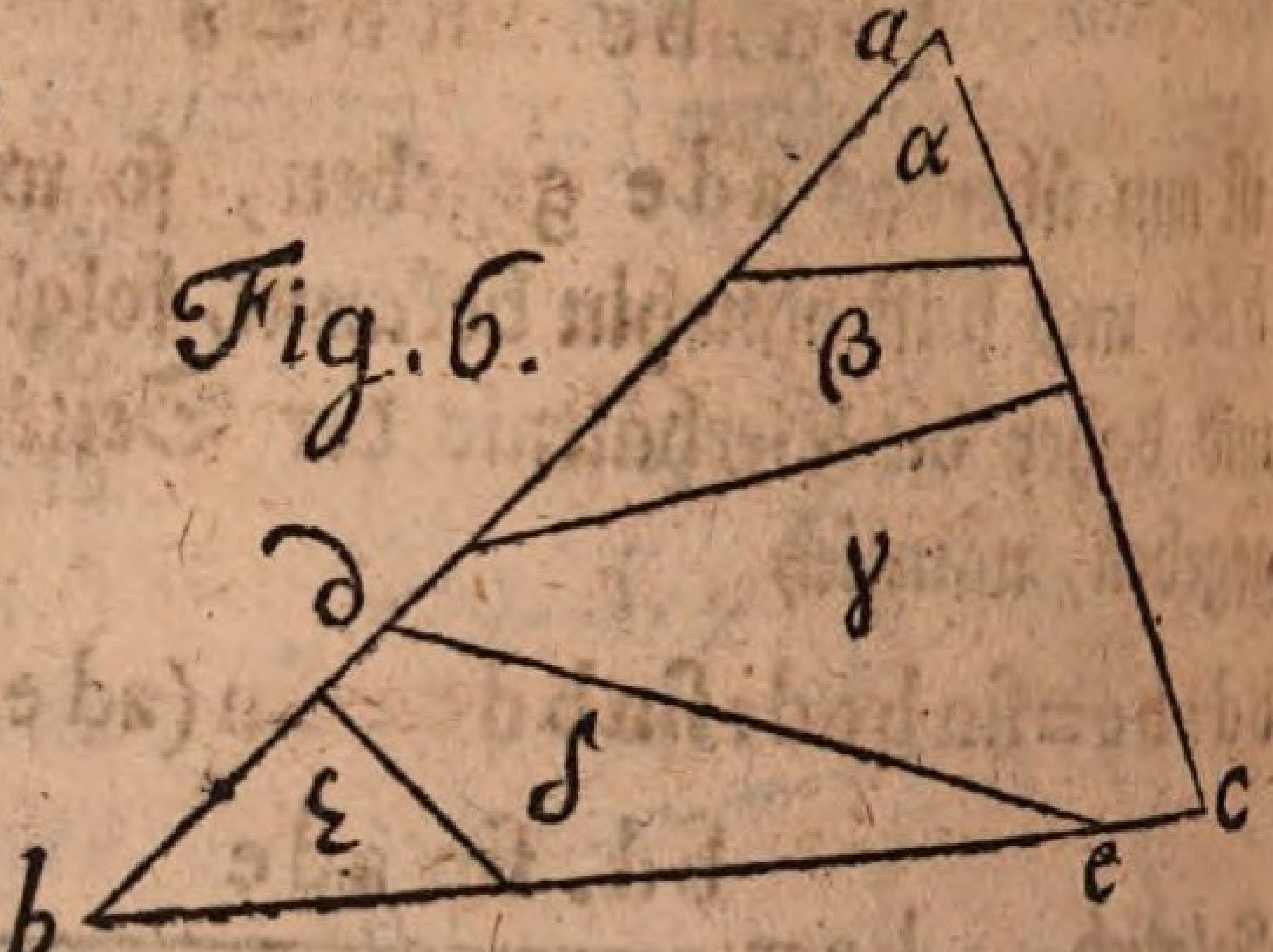
und

$$ad = ab - \sqrt{(2\delta\,(\text{Cot}\, b - \text{Cot}\, ade))}$$

Dieß ist also der Werth für ad, wenn die aus d gehende Theilungslinie de die erste von den Theilungslinien ist, welche die Seite des Dreiecks ac nicht mehr schneiden, sondern erst verlängert mit ihr zusammen kommen. Nennt man demnach ein solches ad überhaupt ϱ, die Summe aller von dem

Scheitel a bis auf die zu ϱ gehörige Theilungslinie abgeschnittenen Theile (hier fig. 6. $\alpha+\beta+\gamma$), μ und den Inhalt des ganzen Dreiecks ν, so ist überhaupt $\varrho=ab-\sqrt{(2(\nu-\mu).(\text{Cot } b-\text{Cot } ade.))}$.

Fig. 6.



Sind nach δ noch Theile abzuschneiden, wie hier ε, so betrachtet man bde als ein neues Dreieck, und schneidet von seinem Scheitel b nach seiner Grundlinie de die übrigen Theile so ab, wie es die beiden Gleichungen

$$b=\sqrt{(2\beta\,(\text{Cot }\varphi+\text{Cot } a))}$$

und

$$\varrho=ab-\sqrt{(2(\nu-\mu).(\text{Cot } b-\text{Cot } ade))}$$

erfodern.

6. Die Gleichung (3.) leidet für den Fall, da man auf ein ϱ kommt, gleichfalls eine Aenderung, es wird nämlich

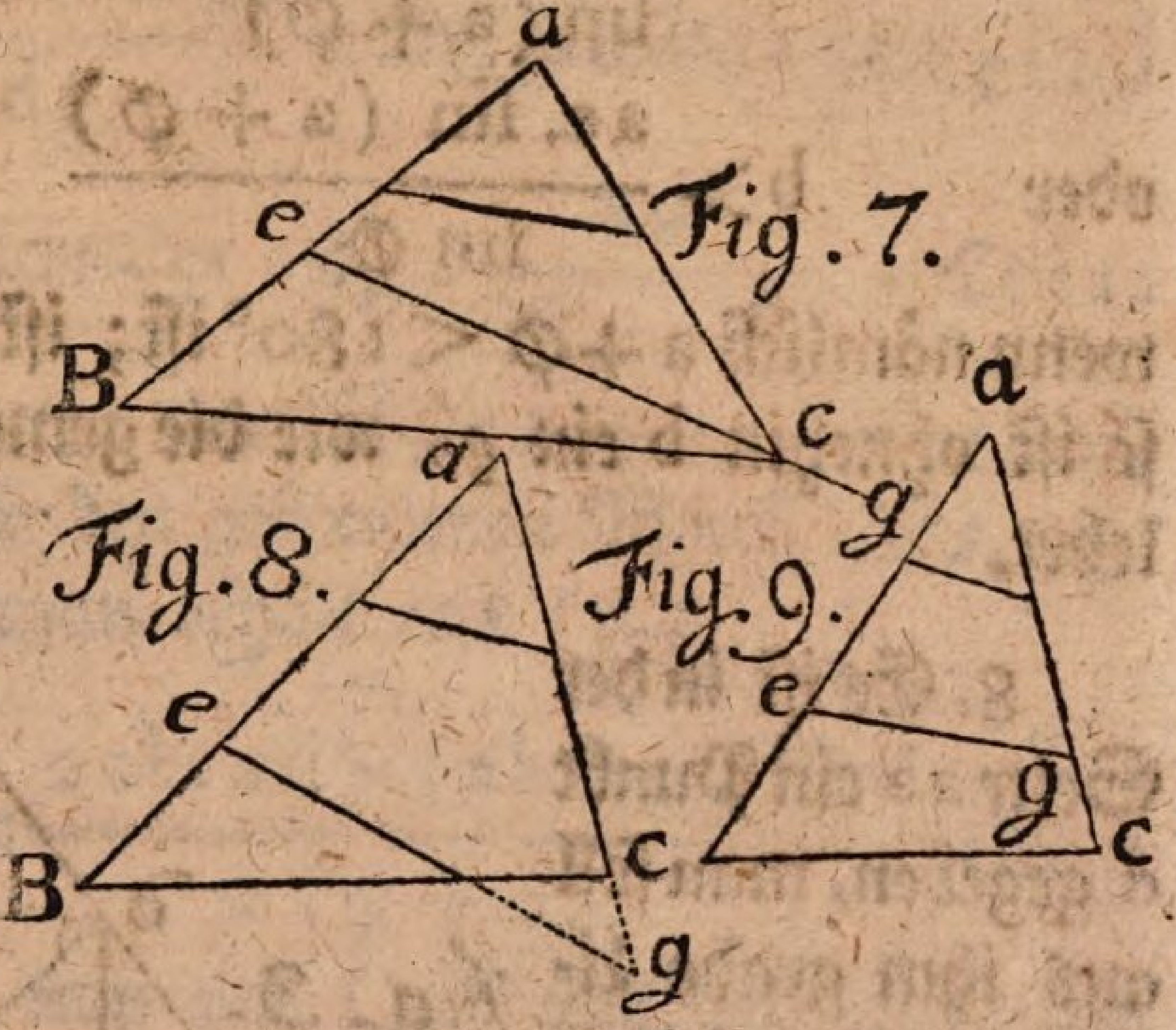
$$ab^2+\varrho^2-2\,ab.\varrho=2\,(\nu-\mu).(\text{Cot } b-\text{Cot }\varphi)$$

Folglich

$$\text{Cot }\varphi=\frac{2\,ab\varrho-(ab^2+\varrho^2)}{2(\nu-\mu)}+\text{Cot } b$$

7. Man

7. Man hat nicht einmal nöthig die Theilungslinie, wie hier (fig. 7, 8, 9.) eg erst zu ziehen, um zu sehen, ob sie einem ϱ zugehöre oder nicht, sondern kann es durch Rechnung finden. Heißt der Winkel aeg, den die zu untersuchende Linie mit aB macht, überhaupt φ, und das zugehörige ae, b; so hat man



$$1.)\ ac = \frac{b.\ \sin\varphi}{\sin(a+\varphi)}\ (\text{fig. } 7.)$$

wenn die Theilungslinie eg durch den Winkelpunkt c geht.

$$2.)\ ac > \frac{b.\ \sin\varphi}{\sin(a+\varphi)}\ (\text{fig. } 9.)$$

wenn eg durch ac durchgeht.

$$3.)\ ac < \frac{b.\ \sin\varphi}{\sin(a+\varphi)}\ (\text{fig. } 8.)$$

wenn eg durch Bc durchgeht und die ac erst verlängert schneidet. In dem Fall also wird aus b

 ein

ein ϱ, wenn

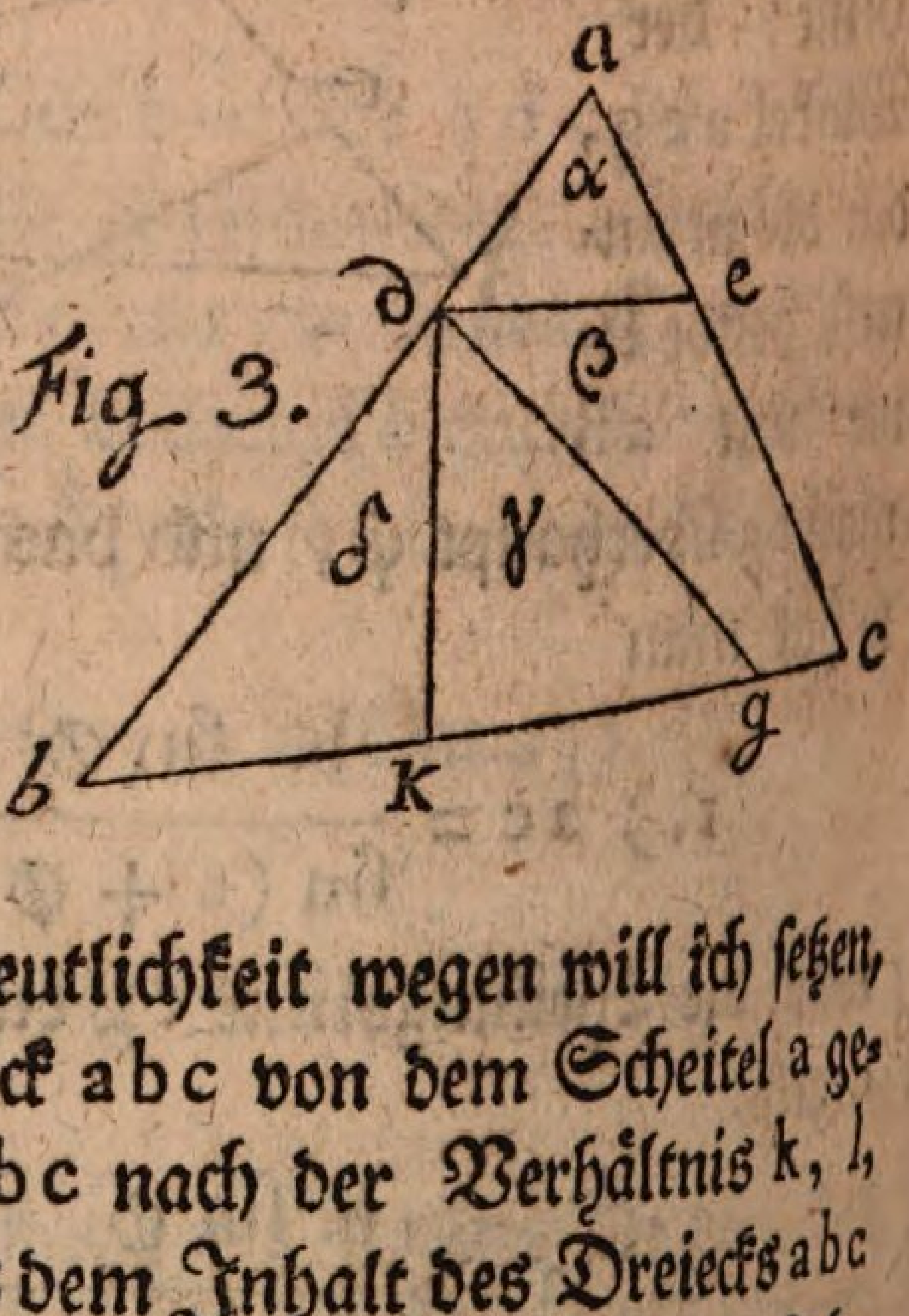
$$ac < \frac{b.\ \sin\varphi}{\sin(a+\varphi)}$$

oder

$$b > \frac{ac.\ \sin(a+\varphi)}{\sin\varphi}$$

wenn nämlich $a+\varphi < 180^\circ$ ist; ist $a+\varphi > 180^\circ$, so ist ohnehin b ein ϱ, wie die gemeine Geometrie lehrt.

8. Es ist in der Seite ab ein Punkt d gegeben, man soll aus ihm grade Linien ziehen, die das Dreieck in eine gegebene Anzahl Theile nach bestimmter Verhältnis theilen.



Aufl. Der Deutlichkeit wegen will ich setzen, man solle das Dreieck abc von dem Scheitel a gegen die Grundlinie bc nach der Verhältnis k, l, m, n, theilen. Aus dem Inhalt des Dreiecks abc und den gegebenen Verhältnissen der Theile suche man ihre Grösse α, β, γ, δ, so ist

$$1.)\ \text{Cot}\ ade = \frac{ad^2}{2\alpha} - \text{Cot}\ a$$

Eben so wäre $\text{Cot}\ adg = \dfrac{ad^2}{2(\alpha+\beta)} - \text{Cot}\ a$, woraus

sich

sich adg ergäbe; fände man nun, daß entweder adg + a > 180° oder zwar < 180° aber $ad > \frac{ac . \sin(a + adg)}{\sin adg}$ wäre, so wäre ad ein ϱ (7.)

und daher hier nicht $\text{Cot } adg = \frac{ad^2}{2(\alpha+\beta)} - \text{Cot } a$; ich will annehmen, man fände a + adg > 180°, so darf man also den gefundenen Werth nicht nehmen, sondern man erhält aus (6.)

$$2.)\ \text{Cot } adg = \frac{2ab . ad - (ab^2 + \varrho^2)}{2(\gamma + \delta)} + \text{Cot } b$$

Verfährt man nun wie (5.) und betrachtet den übrigen Theil des Dreiecks bdg als ein besonderes Dreieck, das man in zween Theile γ, δ, theilen soll, so ergiebt sich weiter

$$3.)\ \text{Cot } bkd = \frac{bk^2}{2\delta} - \text{Cot } b$$

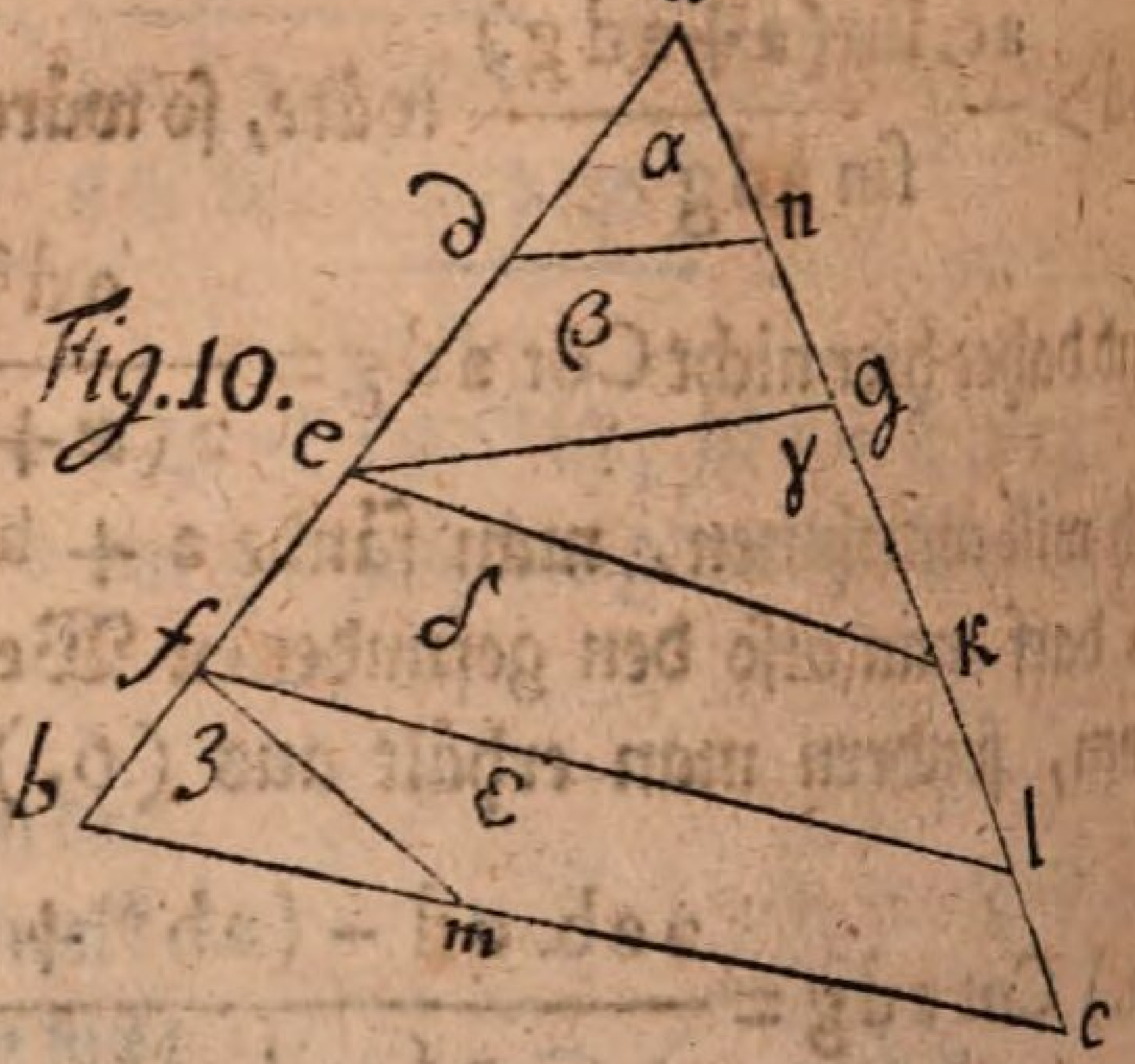
$$= \frac{2\delta}{bd^2 . \sin b^2} - \text{Cot } b$$

$$4.)\ \text{Cot } bgd = \frac{2(\gamma + \delta)}{bd^2 . \sin b^2} - \text{Cot } b$$

wodurch sich zugleich bdk und bdg ergeben. Man verfährt aber kürzer nach (4.) daß man bk : kg = δ : γ nimmt.

9. Auf eben die Art verfährt man, wenn man, wie fig. 10. ein Dreieck aus verschiedenen Punkten d, e, f, in gegebener Verhältnis in Theile zerlegen soll.

Fig. 10.



Man hat nämlich

1.) $\text{Cot } adn = \frac{ad^2}{2\alpha} - \text{Cot } a$

2.) $\text{Cot } aeg = \frac{ae^2}{2(\alpha + \beta)} - \text{Cot } a$

3.) $\text{Cot } aek = \frac{ae^2}{2(\alpha + \beta + \gamma)} - \text{Cot } a$

4.) $\text{Cot } afl = \frac{af^2}{2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)} - \text{Cot } a$

Nimmt man nun eben so

$$\text{Cot } afm = \frac{af^2}{2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)} - \text{Cot } a,$$

und findet daraus, daß für fm, af ein ϱ ist, so hat man aus (6.)

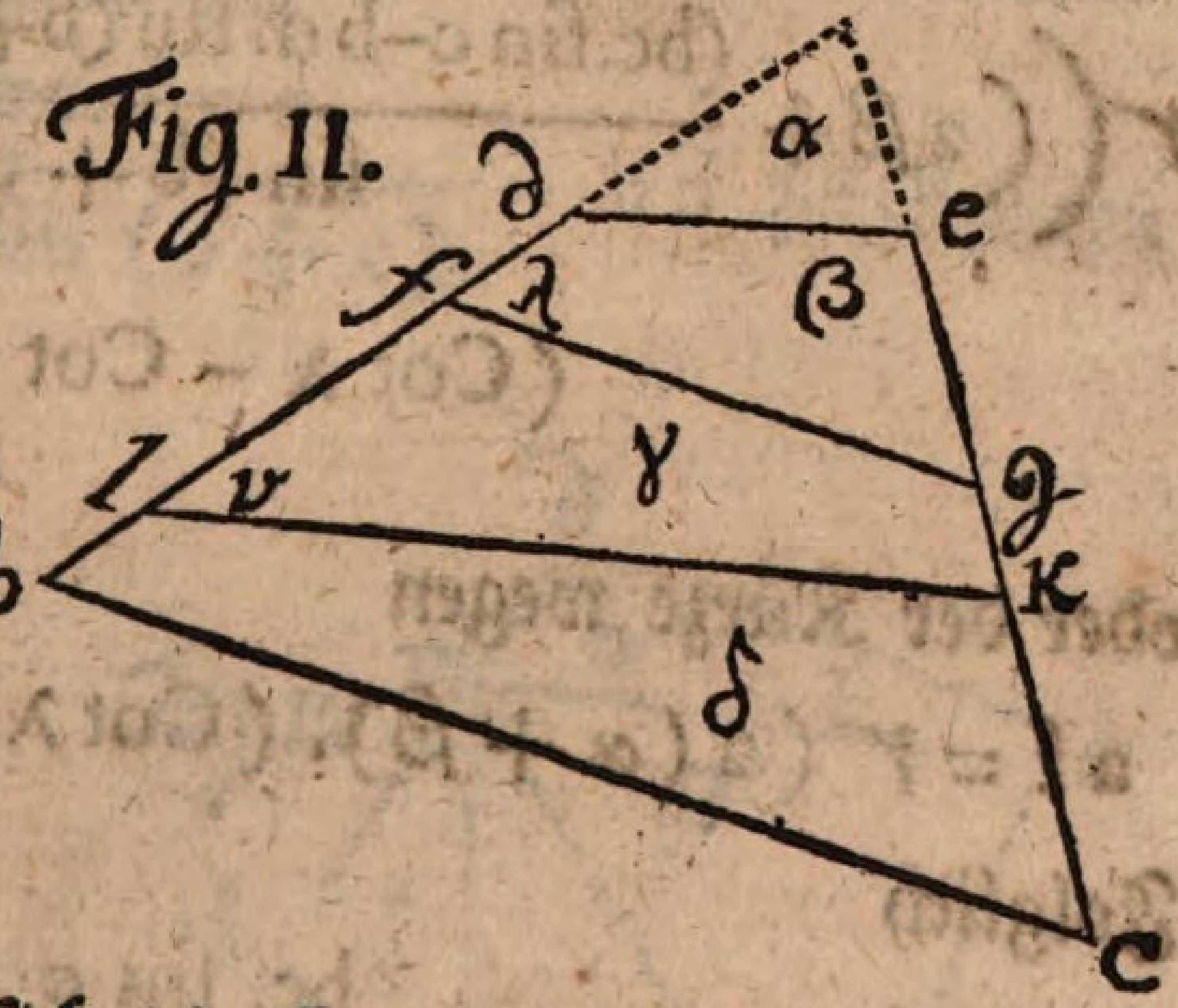
5.) Cot

$$\text{.) Cot } afm = \frac{2ab.af - (ab^2 + af^2)}{2\zeta} + \text{Cot } b$$

wodurch ζ von selbst abgeschnitten wird.

10. Durch das, was bisher von den Dreiecken ist gesagt worden, lassen sich leicht alle Vierecke auf jede verlangte Art theilen. Sollte man z. B. das Viereck debc (fig. 11.) in drei Theile β, γ, δ, theilen, so daß die Theile eine gegebene Verhältnis gegen einander haben, und die Theilungslinien fg, lk, mit der Seite bd gegebene Winkel λ, ν machen, so müßte man so verfahren.

Fig. II.



Man gedenke sich die Seiten bd, ce, bis in a wo sie sich durchschneiden, verlängert, so wird

$$ab = \frac{bc.\sin c}{\sin (b + c)}, \text{ also}$$

$$ad = \frac{bc.\sin c}{\sin (b + c)} - bd$$

und der Inhalt des Dreiecks ade, oder

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\left(\frac{bc.\sin c}{\sin (b+c)} - bd\right).de.\sin bde$$

Man

Man betrachte daher das gegebene Viereck als ein Dreieck, das in vier Theile $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sollte getheilt werden, von welchem aber der erste Theil

$$\alpha = \frac{(bc.\,\sin c - bd.\,\sin(b+c)).de.\,\sin bde}{2\,\sin(b+c)}$$

schon abgeschnitten wäre, so lassen sich die Theile β, γ, δ, wie bisher abschneiden. So wäre hier af =

$$\surd\left(\left(2\beta + \frac{(bc.\sin c - bd.\sin(b+c)).de.\sin bde}{\sin(b+c)}\right).\right.$$
$$\left.(\mathrm{Cot}\,\lambda - \mathrm{Cot}\,(b+c))\right)$$

oder der Kürze wegen

$$af = \surd(2(\alpha+\beta).(\mathrm{Cot}\,\lambda - \mathrm{Cot}\,(b+c)))$$

Folglich

$$df = af - ad = bd - \frac{bc.\,\sin c}{\sin(b+c)} + \surd(2(\alpha+\beta).$$
$$(\mathrm{Cot}\,\lambda - \mathrm{Cot}\,(b+c)))$$

Und sind umgekehrt in der Seite bd die Punkte gegeben, aus welchen man die Theilungslinien ziehen soll, so findet man eben so die Winkel, unter welchen man sie ziehen muß. So ist, wenn man

$$\frac{bc.\,\sin c}{\sin(b+c)} - bd = \mu \text{ setzt}$$

$$df + \mu = \surd(2(\alpha+\beta).(\mathrm{Cot}\,\lambda - \mathrm{Cot}\,(b+c)))$$

mit-

mithin

$$\frac{(df+\mu)^2}{2(\alpha+\beta)} + \text{Cot}\,(b+c) = \text{Cot}\,\lambda$$

Eben so

$$\frac{(dl+\mu)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)} + \text{Cot}\,(b+c) = \text{Cot}\,\nu$$

u. s. f. wo man allemal statt α den Werth von $\frac{(bc.\sin c - bd.\sin(b+c)).de.\sin bde}{2\sin(b+c)}$ und statt μ den Werth von $\frac{bc.\sin c}{\sin(b+c)} - bd$ substituiren muß.

11. Hieraus läßt sich leicht schliessen, wie man bei allen dergleichen Aufgaben, als bisher bei den Dreiecken vorgekommen sind, verfahren müsse, wenn z. B. alle Theilungslinien aus einem einigen Punkt m (fig. 12.) oder aus mehreren Punkten m, n, (fig. 13.) gezogen werden sollen.

Fig. 12.

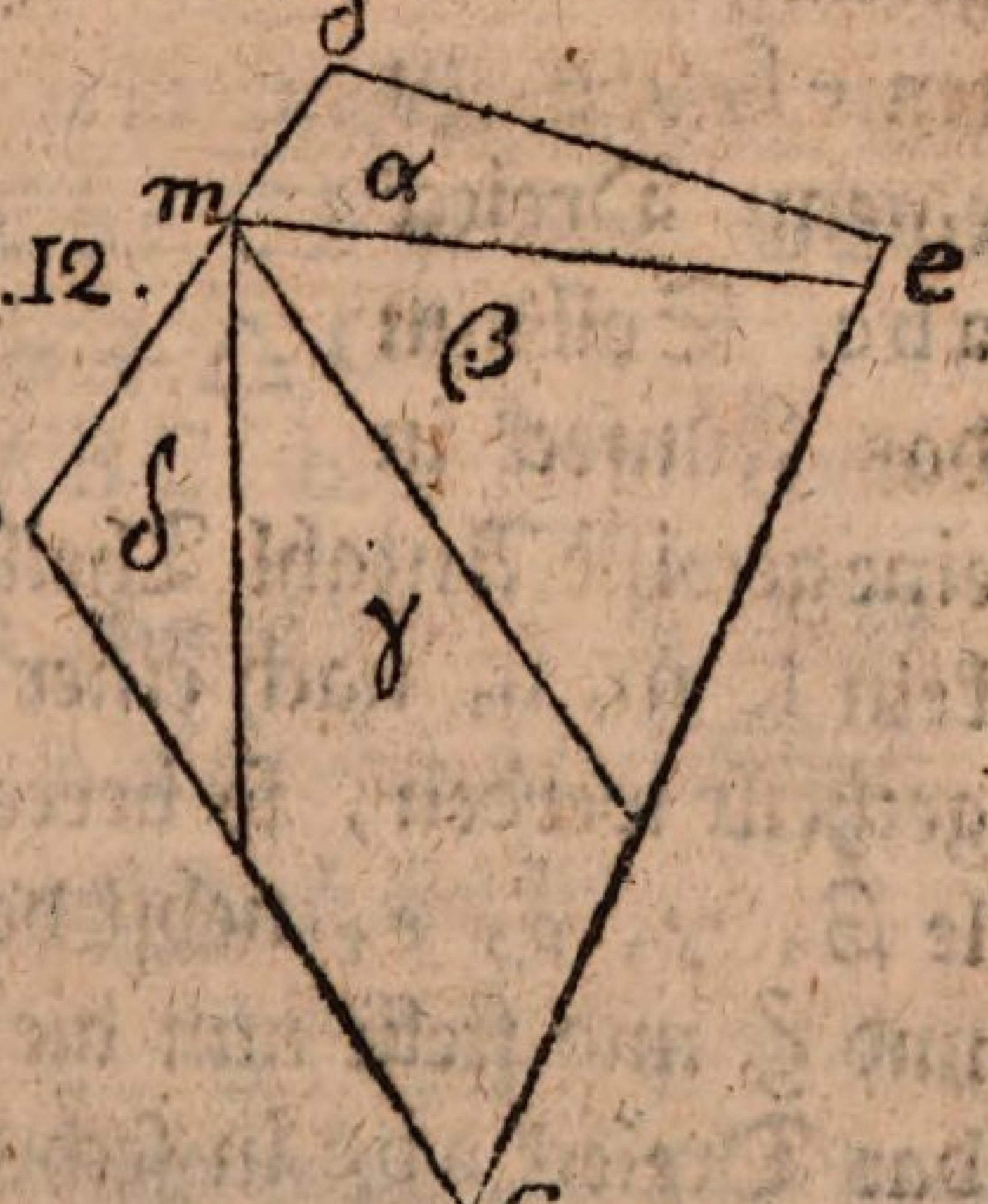
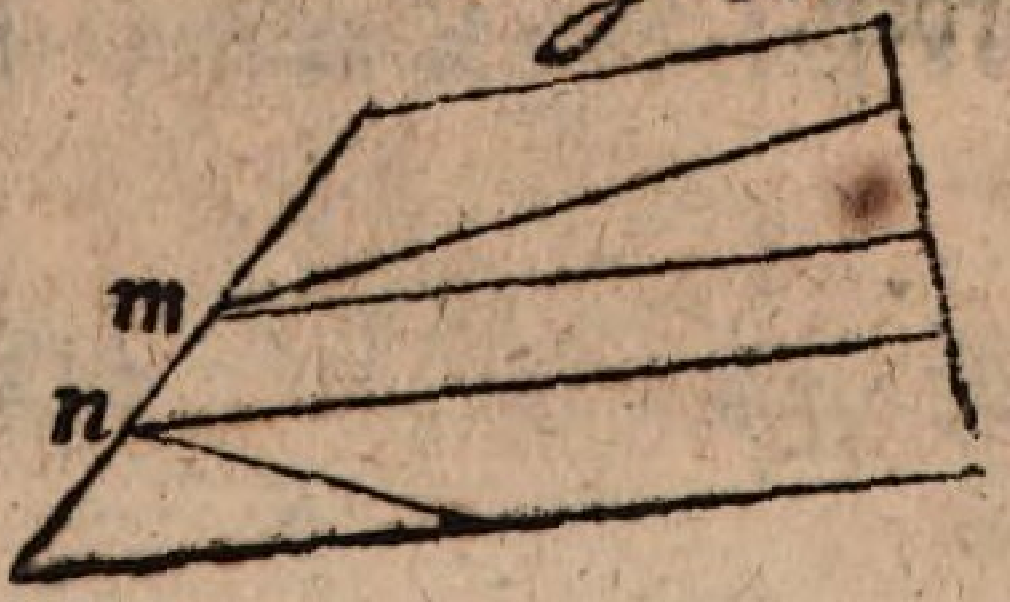
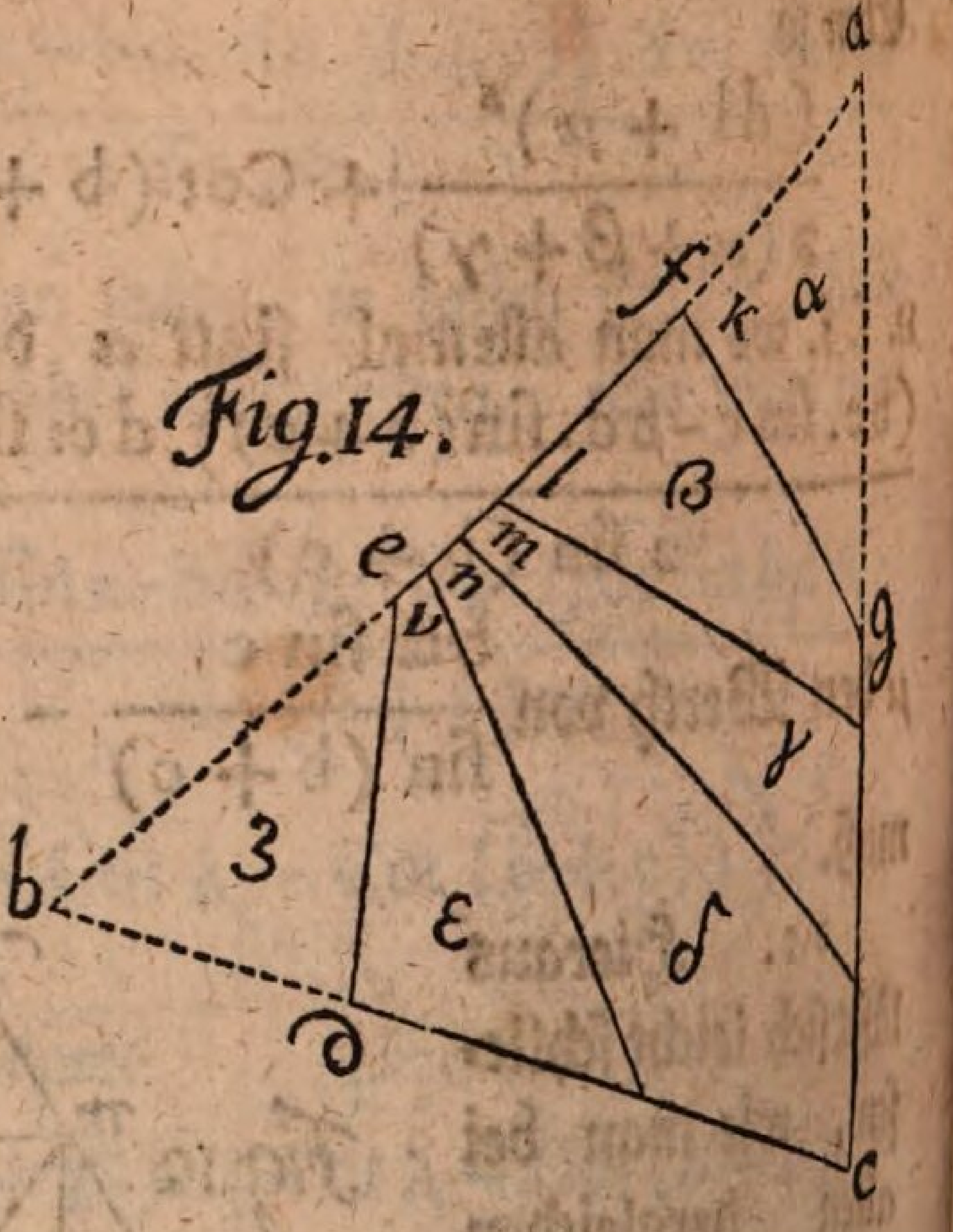


Fig. 13



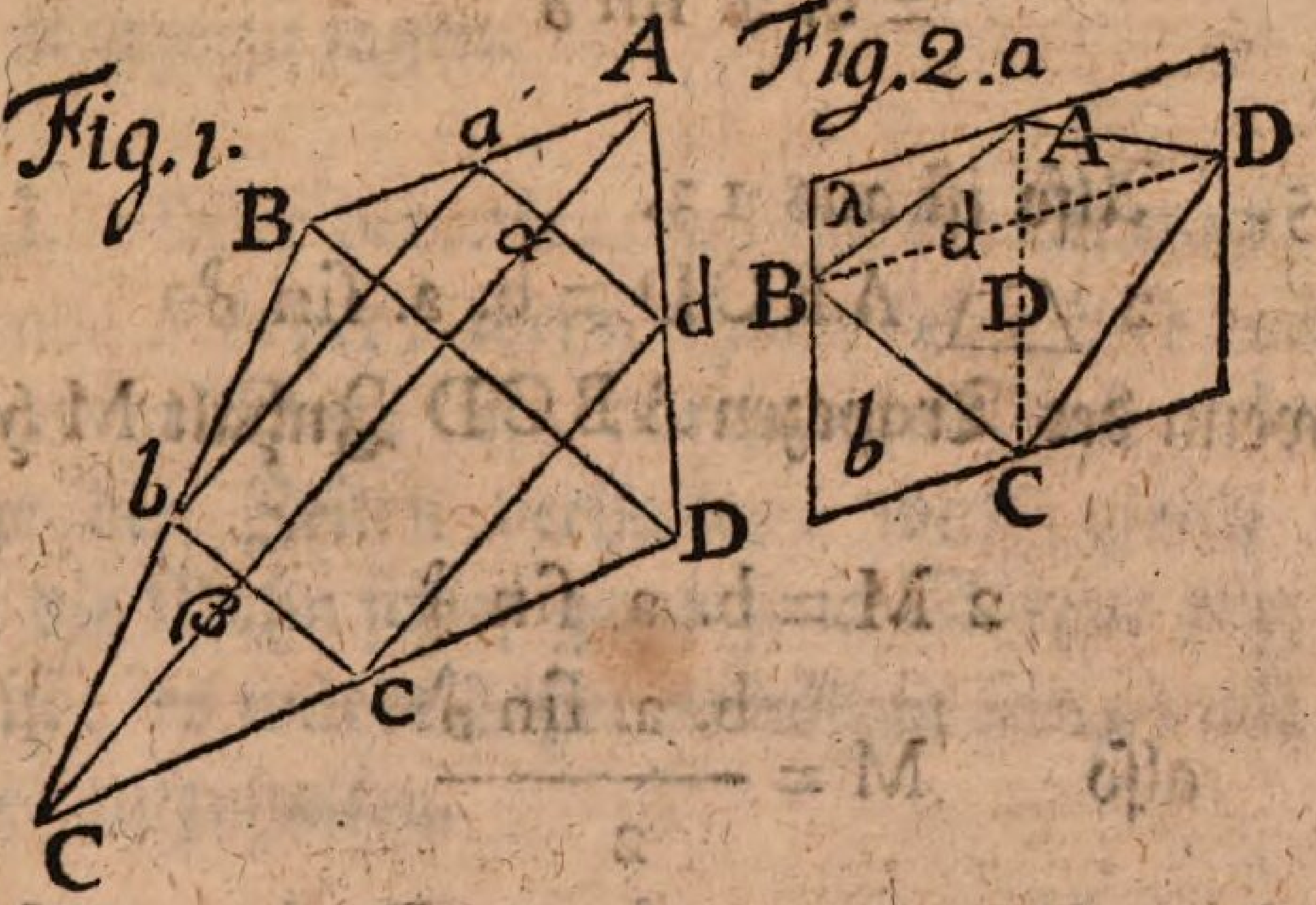
12. Eben so lassen sich auch Fünfecke, wie man will, theilen, wenn man sie durch Verlängerung zwoer Seiten zu Vierecken macht, wie (fig. 14.) wo das Fünfeck cdefg durch Verlängerung der Seiten fe, cd zu einem Viereck bcgf wird. Dieß Viereck macht man nun weiter durch Verlängerung der Seiten ef, cg, zu einem Dreieck abc. Soll nun das Fünfeck in eine gewisse Anzahl Theile unter bestimmten Winkeln l, m, n, nach einer gegebenen Verhältnis eingetheilt werden, so berechnet man zuerst alle Theile β, γ, δ, ε, nebst den beiden Complementen α und ζ, und stellt nun die Theilung so an, als wenn das Dreieck abc in sechs Theile α, β, γ, δ, ε, ζ, unter den Winkeln k, l, m, n, ν, sollte getheilt werden.

Fig. 14.



13. Wenn

13. Wenn man die Seiten eines Vierecks ABCD (fig. 1.) bei a, b, c, d, in gleiche Theile theilt, so ist das Viereck abcd allemal ein Parallelogramm; seine Seiten sind nämlich mit den



beiden Diagonalen AC, BD gleichlaufend, weil $A\alpha : AB = Ad : AD$, $Cb : CB = Cc : CD$ u. s. f. und zwar ist $\triangle Aa\alpha + \triangle Cb\beta = \triangle aBb$. Nun ist $\triangle aBb = \frac{1}{4} \triangle ABC$, also ⏢ $AabC = 3. \triangle aBb$. und ▭ $a\alpha\beta b = \frac{1}{2} \triangle ABC$; eben so das ▭ $\alpha\beta cd = \frac{1}{2} \triangle ACD$, folglich

▭ $abcd = \frac{1}{2}$ ⏢ ABCD

Zieht man durch A, B, C, D, Linien mit AC und BD gleichlaufend, so erhält man um das Trapez ein Parallelogramm, das viermal so groß, als das innere ist; also ist dieß äussere Parallelogramm = 2 ⏢ ABCD.

14. Nun ist des äussern Parallelogramms (fig. 2.) Inhalt $= b.\ a.\ \sin\lambda$; aber λ ist der Winkel, unter dem sich beide Diagonalen schneiden; setzt man also diesen $= \delta$, so ist der genannte Inhalt

$$= b.\ a.\ \sin\delta$$

15. Also ist aus 13.

$$2\ \text{⏢}\ ABCD = b.\ a.\ \sin\delta$$

oder, wenn des Trapezen ABCD Inhalt M heißt, so ist

$$2\,M = b.\ a.\ \sin\delta$$

$$\text{also}\quad M = \frac{b.\ a.\ \sin\delta}{2}$$

Nun ist $b = D$, und $a = d$, wo D, d, wie fig. 2. zeigt, die beiden Diagonalen des Trap. sind, also ist

$$M = \frac{D.\ d.\ \sin\delta}{2};$$

Dieß löst die brauchbare Aufgabe in der praktischen Geometrie auf: aus den beiden Diagonalen eines Vierecks, und dem Winkel, unter welchem sie einander schneiden, den Inhalt zu finden.

§. 349.

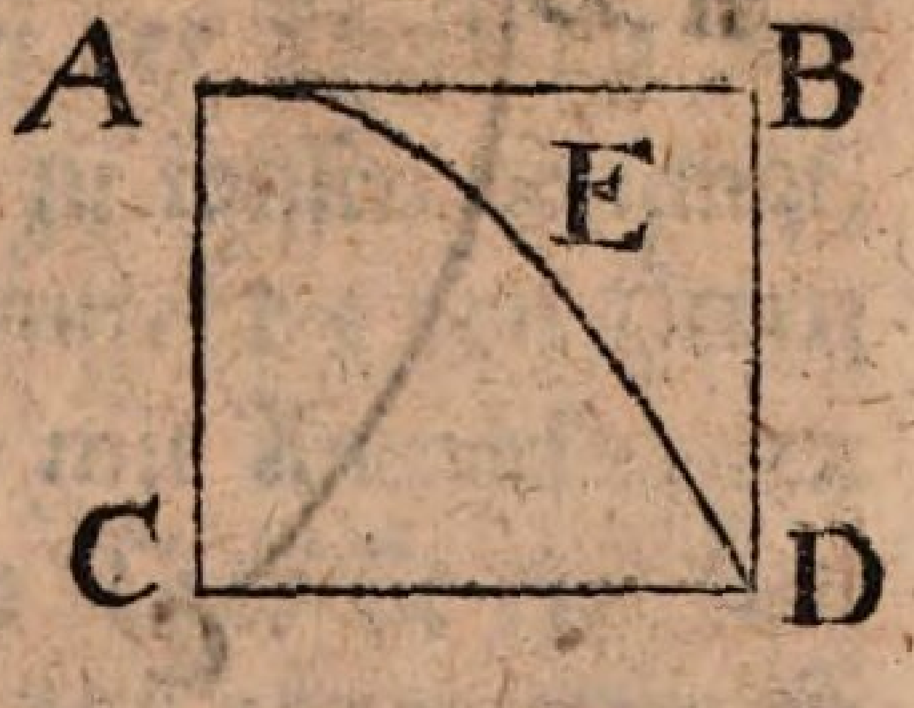
Ich habe zwar in dem ersten Stück dieser Erläuterungen S. 94. und 120. schon erwähnt, daß der Nutzen, den man aus der Betrachtung der

Kegel-

Kegelschnitte zieht, sehr beträchtlich ist; weil ich aber der Brauchbarkeit dieser Linien blos erwähnt habe, ohne ein Beispiel davon zu geben, so finde ich hier noch Gelegenheit, etwas davon in möglichster Kürze zu sagen.

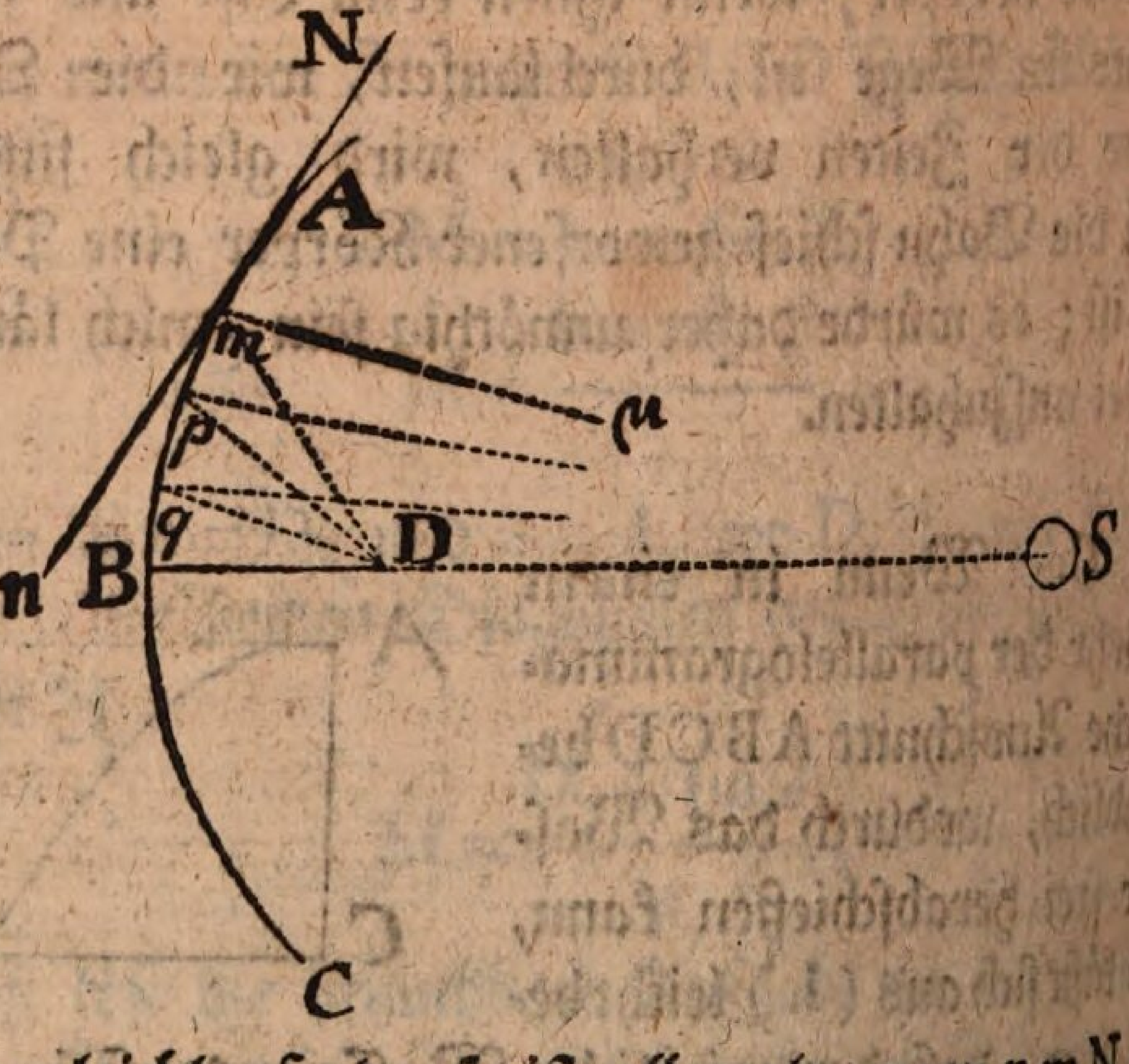
I. Wer bedenkt, daß sich die Räume, welche fallende Körper, wenn ihnen keine Luft und sonst nichts im Wege ist, durchlaufen, wie die Quadrate der Zeiten verhalten, wird gleich finden, daß die Bahn schief geworfener Körper eine Parabel ist; es würde daher unnöthig sein, mich länger dabei aufzuhalten.

II. Wenn in einem Wehr der parallelogrammatische Ausschnitt ABCD befindlich, wodurch das Wasser frei herabschießen kann, so läßt sich aus (I.) leicht beweisen, daß der wirkliche Wasserausguß in einer bestimmten Zeit sich zu dem Wasserausguß, den man haben würde, wenn sich das Wasser oben im Ausschnitt so geschwind wie unten herabstürzte, verhält wie der parabolische Raum ACDEA, wo AC die Axe der Parabel AED ist, zu dem Rectangel ABDC. Man muß also hier den parabolischen Raum ACDEA berechnen d. i. die gegebene Parabel quadriren können. Und so giebt es



unzählige Fälle, die uns die Quadratur der Parabel nothwendig machen.

III. Die beigesetzte Figur stelle den Durchschnitt eines parabolischen Hohlspiegels vor, so daß A B C eine Parabel ist, deren Axe B D und Brennpunkt D ist. Zieht man nun eine Linie m μ der



Axe gleichlaufend, so ist allemal, wenn n m N eine Tangente ist, D m n = μ m N, wie sich leicht beweisen läßt; eine Linie also, die der Axe parallel an die hohle Seite der Parabel und von dem Berührungspunkt unter einem gleichen Winkel zurück durch die Axe gezogen wird, trift in diesem Rückgang die Parabel allemal im Brennpunkt D; ist nun S das Sonnenbild, so kann man wegen der erstaunenden Entfernung desselben, alle Strahlen

S m,

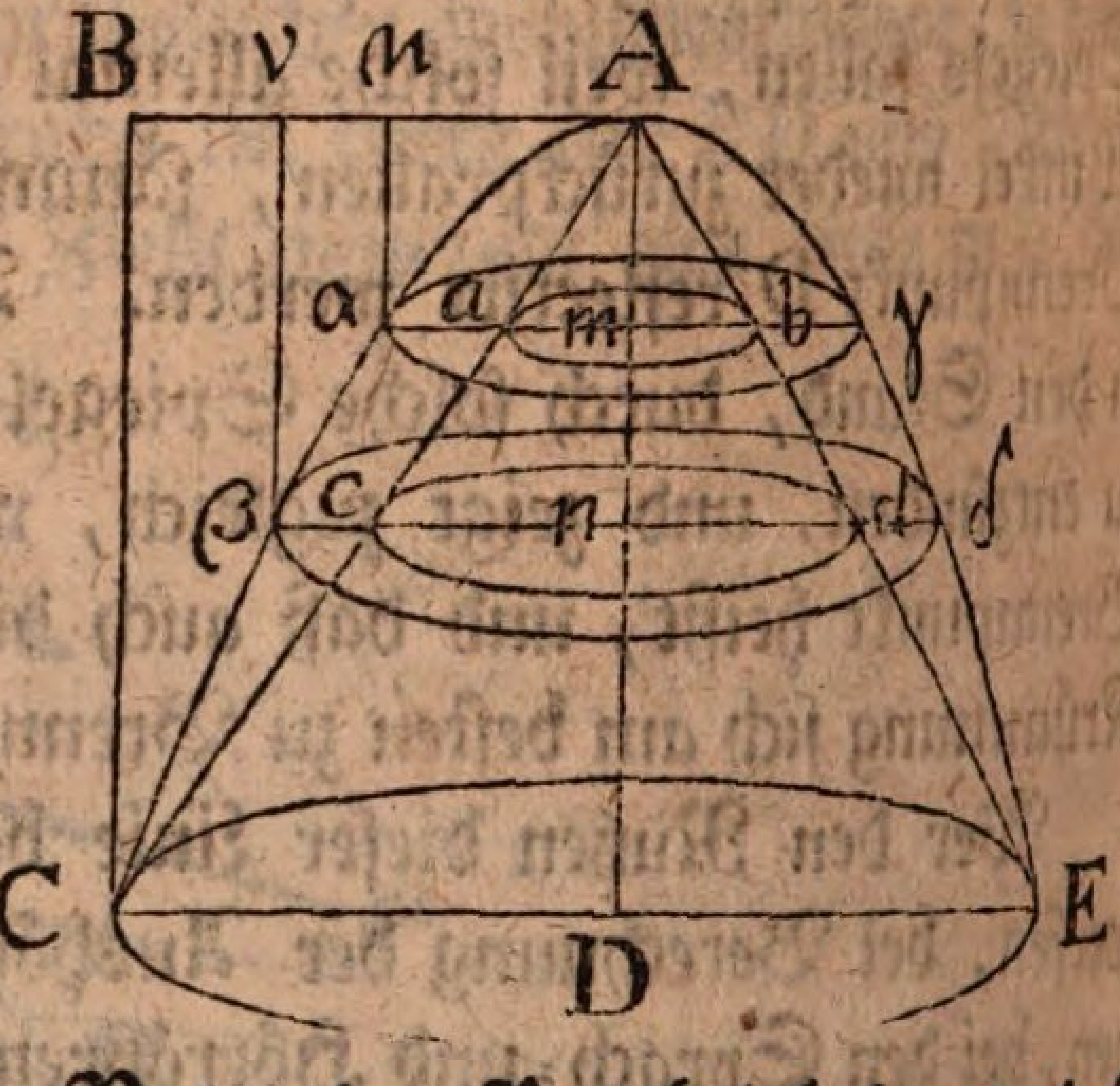
Sm, Sp, Sq mit der Axe als gleichlaufend ansehen, wenn diese selbst nach der Sonne S gerichtet ist; es werden also alle Sonnenstrahlen, die auf die innere Höhlung eines parabolisch gekrümmten Spiegels fallen, weil solche allemal unter gleichem Winkel wieder zurückprallen, sämmtlich durch den Brennpunkt D reflectirt werden. Dieß setzt uns in den Stand, durch solche Spiegel Körper in D zu entzünden, und zeigt zugleich, warum D der Brennpunkt heißt, und daß auch die parabolische Krümmung sich am besten zu Brennspiegeln schickt.

Wer den Nutzen dieser Linie beim Bombenwerfen, bei Berechnung der Aushöhlung der Minen, bei den Sprach- und Hörröhren, bei der Verdoppelung des Würfels und bei der Theilung des Winkels in drei gleiche Theile zu wissen verlangt, wird völlig befriedigt werden, wenn er die von Herrn Prof. Böckmann übersetzte und mit Anmerkungen begleitete Abhandlung des de la Chapelle von den Kegelschnitten liest, ein Werk, das allgemeiner zu werden verdient, als es ist.

Weil ich noch nirgends die Quadratur und Cubatur der Parabel ohne Betrachtung des unendlich kleinen gewiesen gefunden habe, so habe ich auf eine Methode gedacht, wodurch erstere in eine Berechnung des Kegels und letztere in eine Berechnung eines rechtwinklichten Dreiecks verwandelt wird, also beide nichts als die gemeine Geometrie voraussetzen.

I. Quadratur der Parabel.

AD sei der Parabel CAE Durchmesser, ABCD ein Rectangel, und ACE ein Kegel, so verhalten sich alle mit CE parallele Durchschnittsflächen ab, cd, wie die Quadrate der Abscissen Am^2, An^2;



nun ist aus der Natur der Parabel bekannt, daß auch die Ordinaten $\alpha\mu$, $\beta\nu$, sich wie die Quadrate der Abscissen $A\mu$, $A\nu$ verhalten, also heißt die Summe oder die aneinander hängende Reihe aller Ordinaten $\alpha\mu$, $\beta\nu$, u. s. f. finden, die an einander hangende Reihe aller Kreisflächen ab, cd, u. s. f. angeben; oder der Inhalt des Kegels ACE giebt zugleich den Inhalt des parabolischen Raums ABC$\beta\alpha$A; nun ist, wie die Geometrie lehrt, des Kegels Inhalt $= \frac{1}{3}$ AD $\times$ Krfläche CE$=\frac{1}{3}x. 3,14 \ldots y^2$, also die Fläche ABC$\beta\alpha$A$=\frac{1}{3}xy$, weil, was im Kegel $3,14 . y^2$ ist, in der Parabel y heißt. Folglich ist die gesuchte

Fläche ADC$\beta\alpha$A $= \frac{2}{3}xy$

II. Cubatur der Paraboloide.

Wenn ACE (vor. fig.) das Sphäroid einer Parabel ist, so sind die Durchschnittsflächen $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, wie die gemeine Geometrie lehrt, $= 3,14 . y^2$; eben so verhalten sich aber die Abscissen Am, An; also heißt die Paraboloide ACE cubiren, nichts anders als die an einander hangende Reihe aller Ordinaten in einer Linie, in der sich die Abscissen x, wie die Ordinaten z verhalten, finden. Einer solchen Linie gehört die Gleichung 340. zu, daselbst $c = 0$ gesetzt, daß es also die grade Linie ist, und weil nun hier blos von rechtwinklichten Coordinaten die Rede ist, so heißt die Paraboloide ACE cubiren, den Inhalt des rechtwinklichten Dreiecks, dessen Catheten x, z sind, angeben, und dieser ist $= \frac{1}{2} xz$; nun ist aber, was da z heißt, in der Paraboloide $3,14 . y^2$, also der Inhalt der Paraboloide für jede Höhe x,

$= \frac{1}{2} x . 3,14 . y^2$

= der Hälfte eines Cylinders von eben der Höhe und Grundfläche.

Und eben dieses von der Quadratur und Cubatur der Parabel erhält man durch die Differential- und Integralrechnung *).

*) Selbst in diesen Rechnungen kann man sich des hier gewiesenen Verfahrens, Sphäroiden von krummen Linien zu cubiren bedienen. Für Anfän-

§. 372.

In allen übrigen Fällen ist die Ellipse einem Kreis gleich, dessen Durchmesser die mittlere geo-
metri-

fänger, die nur einige Begriffe vom Differentiiren und Integriren haben, sei es mir erlaubt, eine Anwendung davon auf die Cubirung der Ellipsoide und Hyperboloide zu machen. Dieser beiden Kegelschnitte Gleichung ist $y^2 = bx \pm \frac{bx^2}{a}$; wäre nun CAE (vor. fig.) ein Stück einer Ellipsoide oder Hyperboloide, so sind die Durchschnittsflächen, wie vorhin, allemal $= 3,14 . y^2$; heißt man also diese z, so heißt dieses Sphäroid cubiren, die Linie quadriren, für die $z = 3,14 . y^2$

$$= 3,14 \left(bx \pm \frac{bx^2}{a} \right);$$ nun ist $\int z dx$

$$= 3,14 . \int \left(bx dx \pm \frac{bx^2 dx}{a} \right)$$

$$= 3,14 . \left(\tfrac{1}{2} bx^2 \pm \frac{bx^3}{3a} \right),$$ wo das obere Zeichen für die Hyperbel, das untere für die Ellipse gehört, also der Inhalt des Sphäroids =

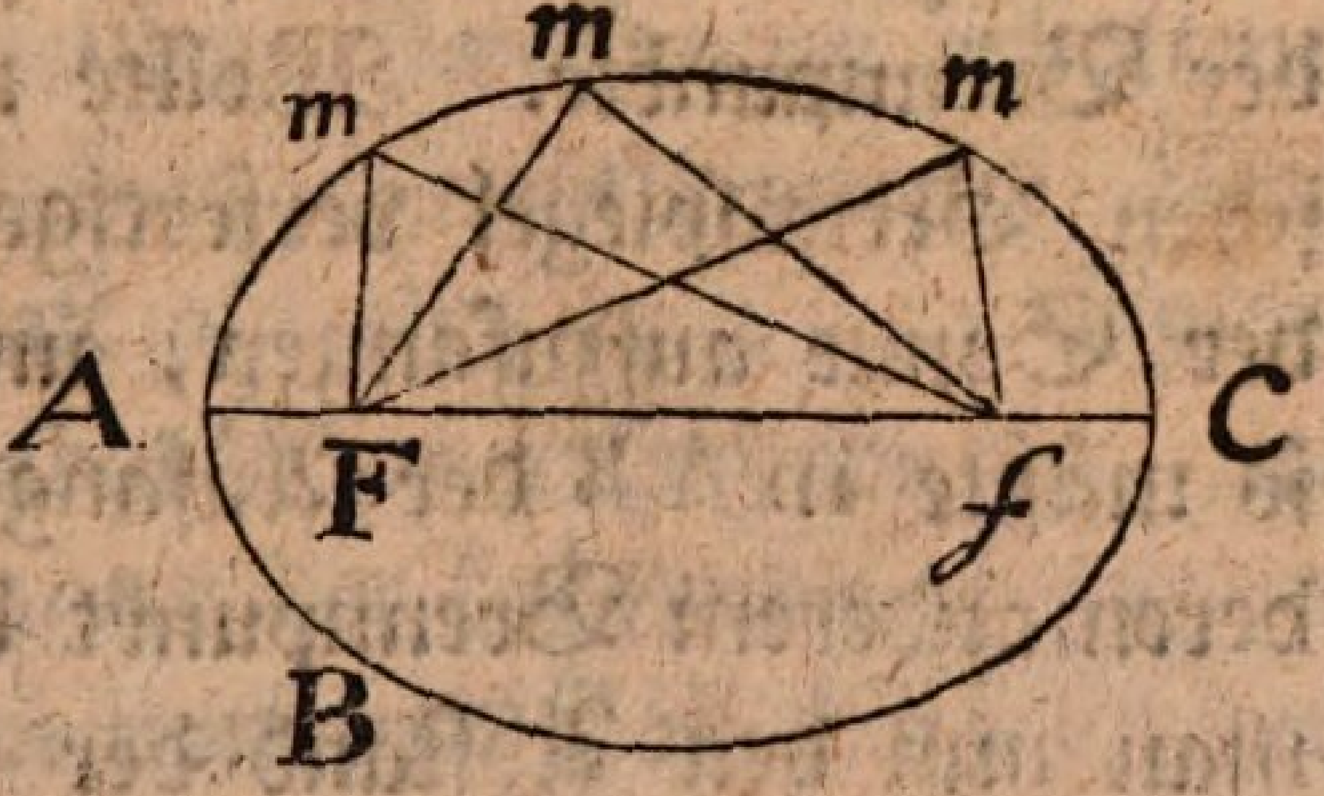
$$3,14 \left(\tfrac{1}{2} b x^2 \pm \frac{bx^3}{3a} \right)$$

Weil

metrische Proportionalzahl zwischen der grossen und kleinern Axe ist.

§. 376.

Es läßt sich leicht beweisen, daß jede Brennpunktslinie Fm, wenn sie unter eben dem Winkel von m wieder nach der Axe zu



gezogen wird, diese zurückgezogene Linie allemal die Axe im andern Brennpunkt f trift *). Befindet sich also in einem der beiden Brennpunkte f ein strahlender Körper, und ist m A B die innere Höh-

Weil nun $b = \frac{c^2}{a}$, so ist für x = a oder der Inhalt einer ganzen Ellipsoide = 3,14.

$$\left(\frac{c^2 a}{2} - \frac{c^2 a}{3}\right) = \frac{3,14. c^2 a}{6} = \tfrac{2}{3} a. 3,14.$$

$(\frac{1}{2} c)^2 = \frac{2}{3}$ vom Produkt aus der grossen Axe in den größten Kreis der Ellipsoide.

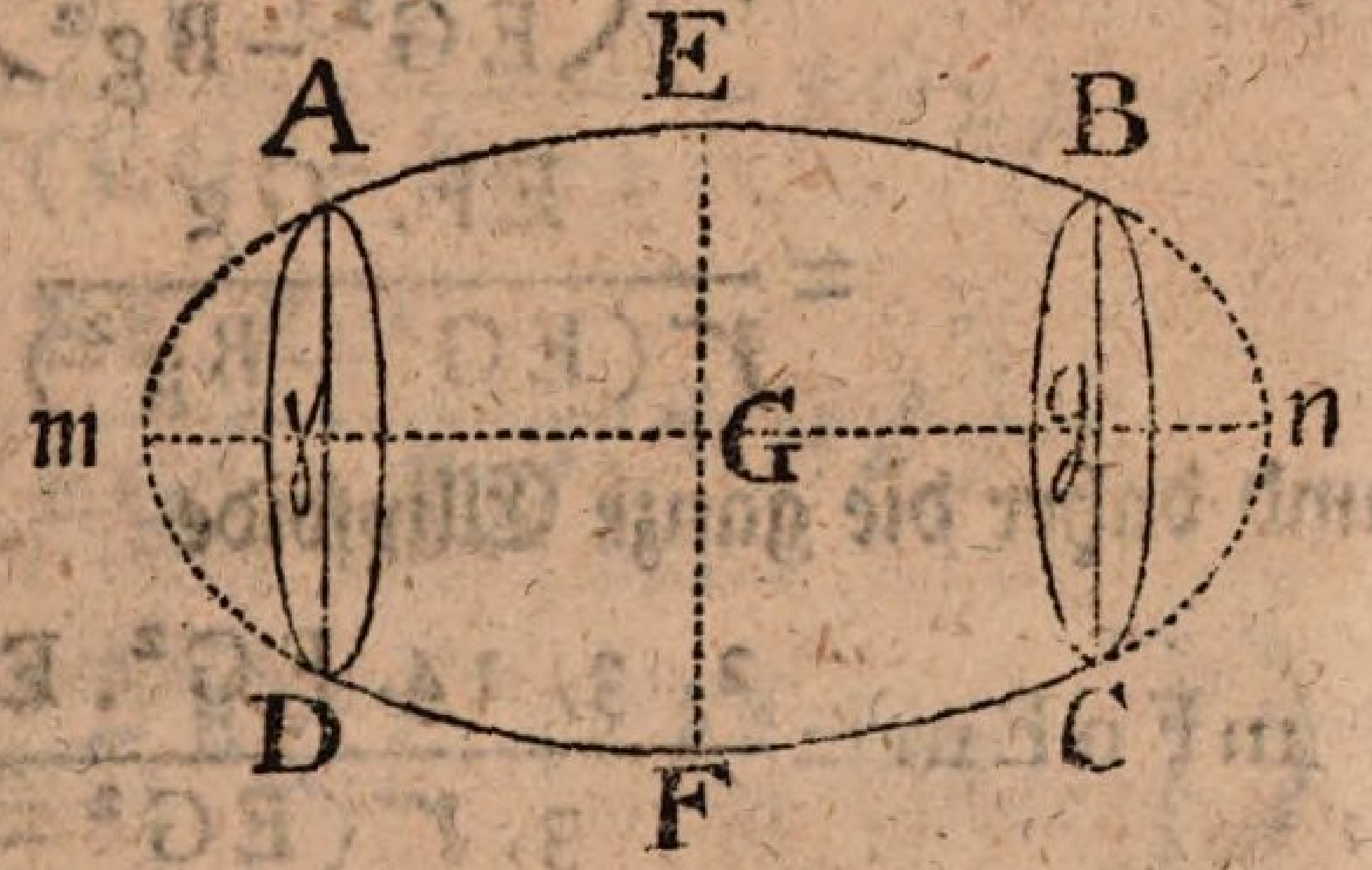
*) Man findet den Beweis dieser und ähnlicher Sätze, die uns die Natur der Kegelschnitte besser kennen lehren, am besten in Hubens Abhandl. von den Kegelschnitten.

lung eines elliptischen Spiegels, so werden alle Strahlen, die auf den Spiegel fallen, in den andern Brennspiegel F reflectirt, und man kann daher in diesen Pkten die Strahlen vereinigen, und dieß ist hier wieder die Ursache von der Benennung der Brennpunkte. Wollte man also einen elliptischen Brennspiegel verfertigen, um die Strahlen der Sonne aufzufangen, und in F zu vereinigen, so müßte in A B der Anfang einer Ellipse seyn, in deren anderem Brennpunkt die Sonne läge, weil man nun den Abstand der Sonne als unendlich weit ansieht, so würde dazu eine Ellipse von einer unendlich grossen Axe erfodert, also eine Parabel, welches mit dem Satz (Erläuter. zu 349. III.), daß sich die parabolische Krümmung am besten für Brennspiegel schicke, übereinkommt.

§. 368.

Durch diesen Satz läßt sich eine Anwendung von der Cubatur der Ellipse, wenn ich solche aus der Note zu §. 349. voraussetze, zeigen. Man hat sich bis hierher über die eigentliche Gestalt oder über die krumme Linie, der die Krümmung der Dauben bei den Fässern am nächsten käme, noch nicht vereinigen können. Einige sehen das Faß als eine Verbindung zweener abgekürzten Kegel an, und dieß ist wohl die irrigste Meinung, andere als einen Cylinder, der nur beim Spundenloch etwas aus einander, und an dem Boden etwas zusammengedruckt

gedruckt wäre, und dem sie deswegen die mittlere Dicke zwischen diesen beiden Orten zueignen; andere machen die Krümmung zu einer Parabel; Herr Lambert sieht sie in seinen vortrefl. Beiträg. I. Th. als eine kreisförmige an, und zeigt a. a. O. wie genau die aus solcher Berechnung erhaltenen Resultate mit Versuchen übereinstimmen. Noch andere sehen das Faß als eine an beiden Spitzen des Durchmessers abgekürzte Ellipsoide an, wie Coesfeld in geom. pract. der bekannter zu sein verdiente. Wenn man nun das Faß ABCD nach der Voraussetzung, daß es eine abgekürzte Ellipsoide sei, berechnen wollte, so müßte man so verfahren: man messe EF, und



halbire die gefundene Länge, so hat man der Ellipsoide mEnFm halbe kleine Axe EG, und der zu diesem Halbmesser gehörige Kreis ist 3, 14. EG^2; nun berechne man die grosse Axe mn nach diesem §. im Buche; es ist nämlich

$$EG^2 - \frac{EF^2 u^2}{mn^2} = y^2$$

Man nehme also für u eine beliebige Abscisse z. E. Gg, weil man da gleich die zugehörige Ordinate

Bg als den Halbmesser des Bodens gut messen kann, so hat man

$$EG^2 - \frac{EF^2 . Gg^2}{mn^2} = Bg^2$$

also $$EG^2 - Bg^2 = \frac{EF^2 . Gg^2}{mn^2}$$

und $$mn^2 = \frac{EF^2 . Gg^2}{EG^2 - Bg^2}$$

also $$mn = r.\left(\frac{EF^2 . Gg^2}{EG^2 - Bg^2}\right)$$

$$= \frac{EF . Gg}{r(EG^2 - Bg^2)}$$

und daher die ganze Ellipsoide

$$mFnEm = \frac{2. 3,14. EG^2 . EF . Gg}{3. r(EG^2 - Bg^2)}$$

Nun ist das Stück davon

$$AmD = 3,14. \left(\tfrac{1}{2} bx^2 - \frac{bx^3}{3a}\right)$$

$$= 3,14. \left(\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{a}(Gm - Gg)^2 - \frac{c^2}{3a^2}(Gm - Gg)^3\right)$$

$$= 3,14. \frac{c^2}{a}\left(\frac{a}{2} - Gg\right)^2 . \left(\tfrac{1}{2} - \left(\frac{\tfrac{1}{2}a - Gg}{3a}\right)\right)$$

= 3,

$$= 3,14 \cdot \frac{c^2}{a}\left(\frac{a}{2} - Gg\right)^2 \cdot \left(\frac{3a - a + 2Gg}{6a}\right)$$

$$= \frac{3,14 \cdot c^2 \cdot (\frac{1}{2}a - Gg)^2 \cdot (a + Gg)}{3a^2}$$

und weil dieß zu beiden Seiten, also doppelt genommen, von der ganzen Ellipsoide abgezogen werden muß, so ist des Fasses Inhalt =

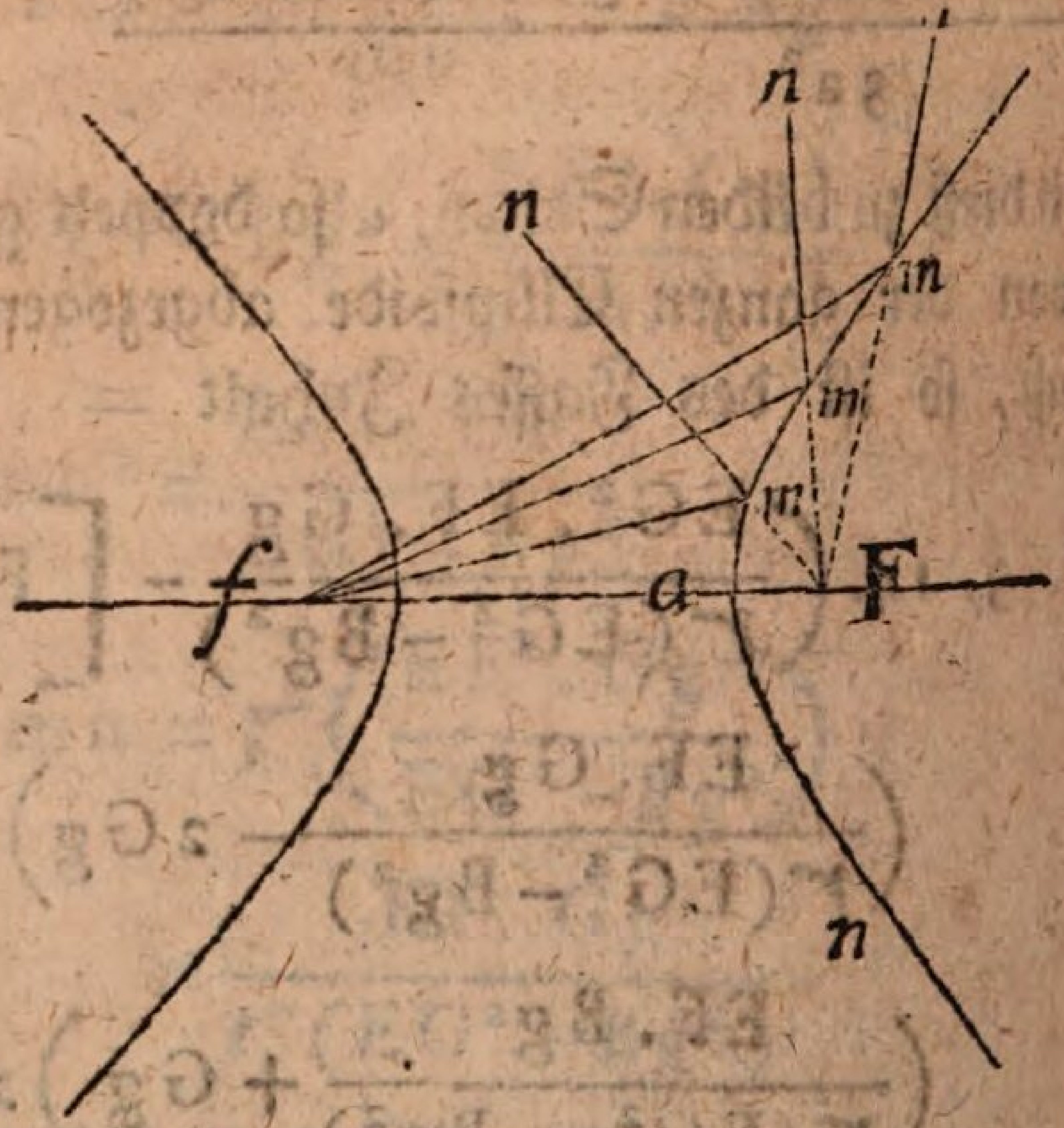
$$\tfrac{2}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{EG^2 \cdot EF \cdot Gg}{r(EG^2 - Bg^2)} - \left[EG^2 \cdot \left(\frac{EF \cdot Gg}{r(EG^2 - Bg^2)} - 2Gg\right)^2 \times \left(\frac{EF \cdot Bg}{r(EG^2 - Bg^2)} + Gg\right) \times (EG^2 - Bg^2) : (EF^2 \cdot Gg^2)\right]\right)$$

Ausser der Lambertschen Berechnung mag diese unter den angeführten der Wahrheit wohl am nächsten kommen; die Lambertsche verdient aber vor allen den Vorzug, wiewohl ich unten noch Gelegenheit finden werde, die Krümmung der Dauben noch mit einer andern hier nicht erwähnten krummen Linie zu vergleichen.

§. 405.

§. 405.

Eigentlich sind hier f und F keine Brennpunkte, sondern das, was man in der Optik Zerstreu-



ungspunkte nennt; weil man aber da bei solchen Pkten die Benennung der Brennpunkte beibehält, so geschieht es auch hier. Ist nämlich in f ein strahlender Körper, der seine Strahlen auf die erhabene Fläche der Hyperboloide man schickt, so werden sie alle nach n so reflectirt, als wenn sie sämmtlich von F herkämen; rückwärts verlängert würden also diese reflectirte Strahlen sich alle in F vereinigen, daher ist F bei der Hyperbel ein geometrischer Brennpunkt aber kein physischer, und eben das gilt auch von f.

Wer übrigens den Gebrauch der Hyperbel in der Dioptrik, Catoptrik, bei der Dreitheilung des Win-

Winkels u. s. w. zu wissen verlangt, findet solches in der schon erwähnten Abhandl. des de la Chapelle, aber das eigentlich geometrische dieses und der beiden andern Kegelschnitte, besonders was die Bestimmung der dabei vorkommenden Linien, als der Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen, Brennpunktslinien und vieler anderer solcher Linien, die uns zur genauern Kenntnis der Natur dieser Linien führen, betrift, werden Anfänger am besten kennen lernen, wenn sie Hubens Abhandl. von den Kegelschn. und meine Anmerkungen dazu nachlesen, wo ich für alle diese Linien besondere Gleichungen angegeben habe.

Auch werden sie Schönbergs Abhandl. von Quadraturen, Rectification :c. der Kegelschnitte nicht ohne Nutzen lesen.

§. 430.

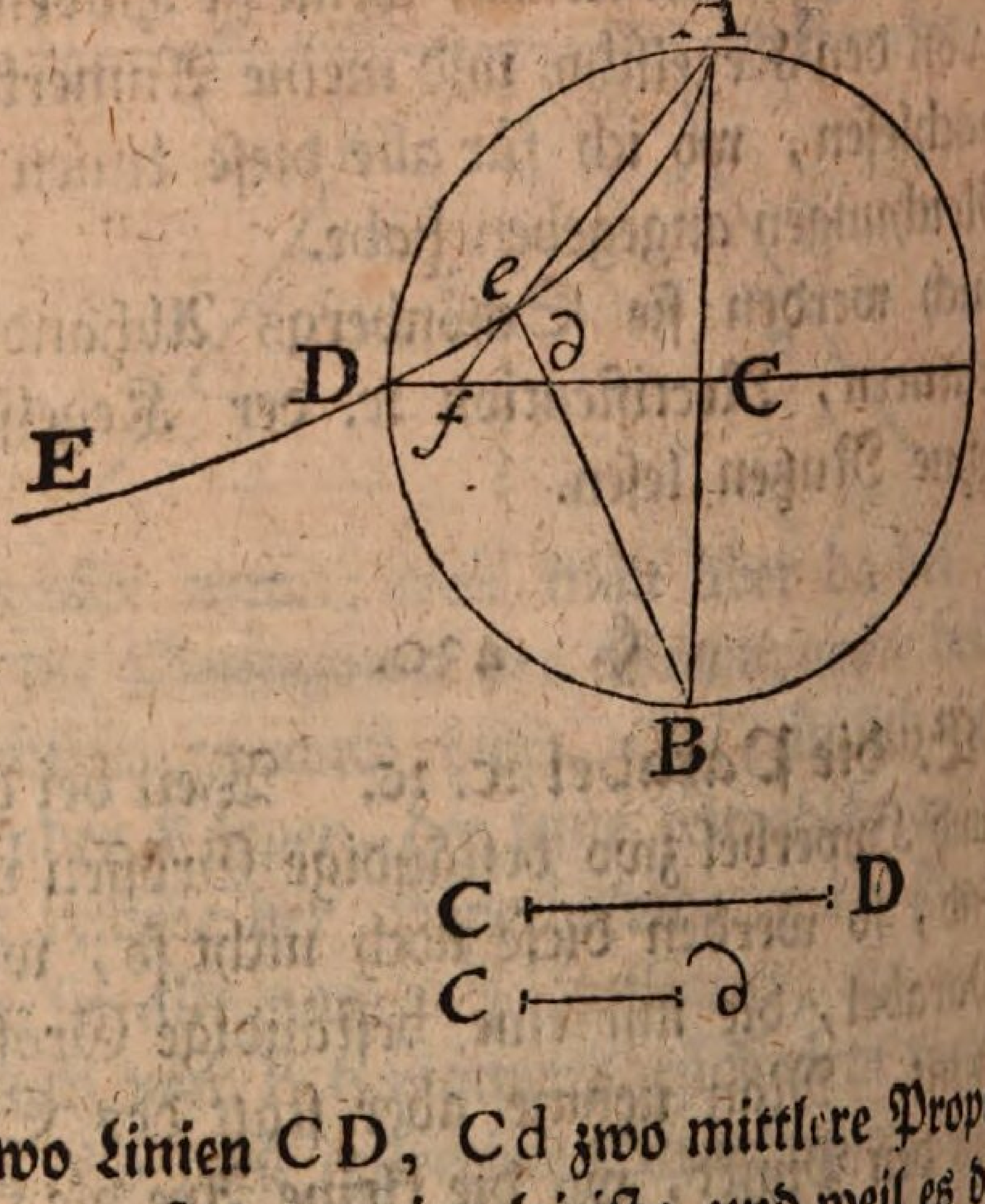
Z. E. die Parabel :c. :c. Weil bei der Ellipse und Hyperbel zwo beständige Grössen vorhanden sind, so werden diese noch nicht so, wie hier die Parabel, die nur eine beständige Grösse hat, bestimmt. Man nehme aber statt des Scheitelpunkts den Punkt, wo die kleine Axe die krumme Linie trift, so ist aus (Erläut. zu §. 368.) klar, daß auch Ellipse und Hyperbel blos durch die Lage ihrer Axe γg, den Punkt E, und einen einzigen andern Punkt B gegeben sind.

§. 468.

Ausser den hier genannten grössern Werken werden den Anfänger das nöthigste davon in Tempelhofs vollständ. Anl. zur Alg. so ziemlich beisammen finden.

§. 469.

Ein Gebrauch dieser Linie ist die Verdoppelung des Würfels, die eigentlich mit der Aufgabe zwi-

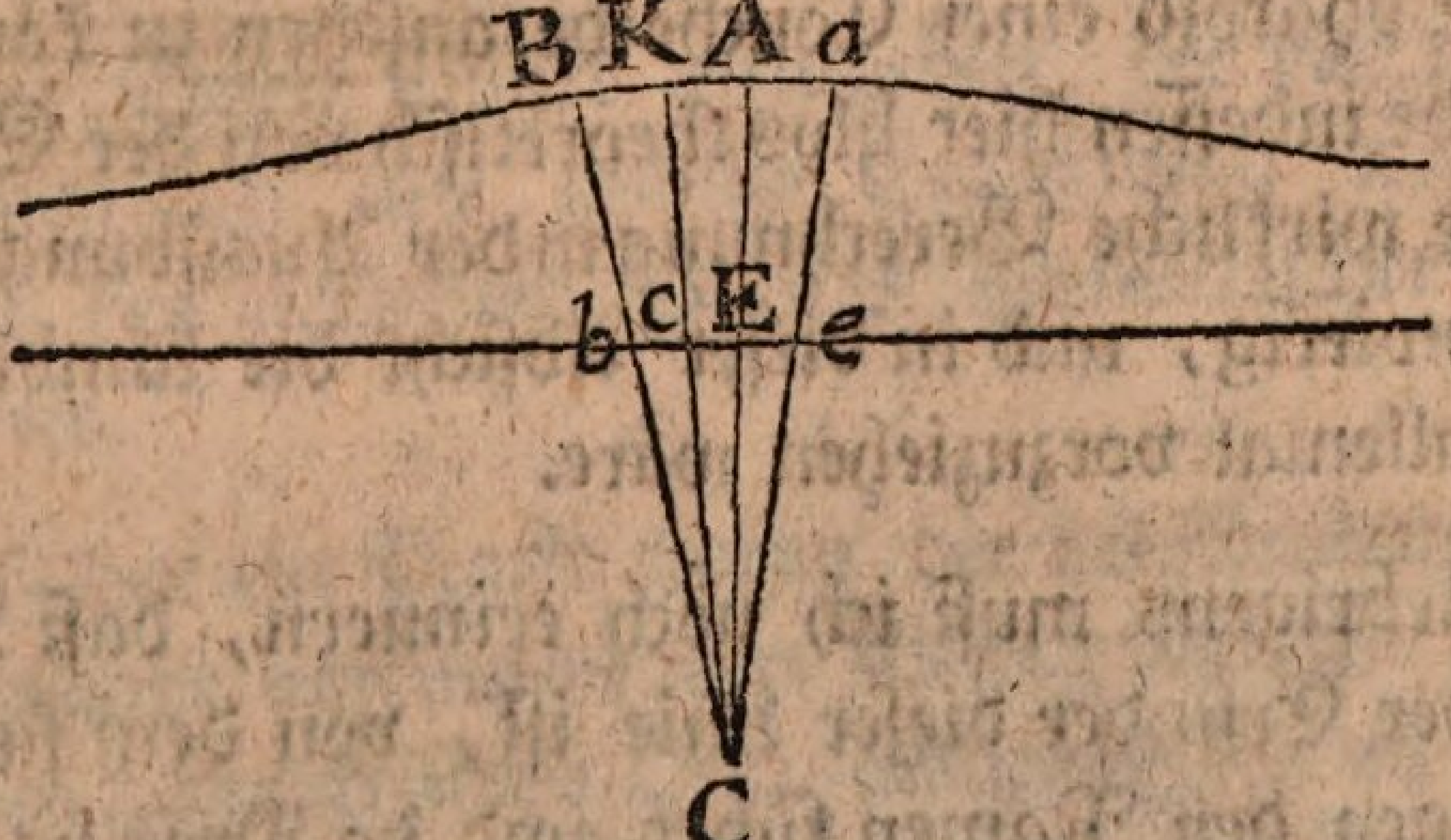


schen zwo Linien CD, Cd zwo mittlere Proportionallinien zu finden, einerlei ist; und weil es da genug ist, nur die erste von diesen beiden mittlern zu haben, so verfahre man so: man verzeichne die zum Kreis, dessen Halbmesser CD ist, gehörige Cissoide ADE, schneide auf CD die Cd ab, und ziehe

ziehe durch B und d die grade Linie B d e, so giebt sich in der Cissoide der Durchschnittspunkt e, und eine durch A und e gezogene grade Linie A f schneidt nun auf C D das C f ab, welches die erste von den beiden gesuchten Linien ist. Es würde unnöthig sein, auch noch den Beweis von diesem Verfahren herzusetzen, da die Aufgabe ohnehin von wenigem Nutzen ist. S. unten §. 508.

§. 477.

Der Kreis, dessen Krümmung unter allen Kreisen der Krümmung einer krummen Linie an einem gegebenen Punkt am nächsten kommt, heißt für diesen Punkt der krummen Linie der Krümmungskreis (circulus osculator) und dieses Kreises Halbmesser, der Halbmesser der Krümmung (radius osculi, radius euolutae) S. die Erläut.



zu §. 504. Sind nun B, K, a, Punkte, die nahe bei A liegen, so werden b C, c C, e C, E C

Ee nicht

nicht merklich von einander verschieden sein, aber überdas sind Bb, Kc, AE, ae, einander gleich, also werden auch BC, KC, AC, aC nicht merklich von einander verschieden sein; eine krumme Linie aber, in der alle Punkte von einem gewissen Punkt gleich weit abstehen, ist ein Kreis; also kann man, wenn a und B nahe bei A liegen, das Stück der Conchoide BKAa als einen Bogen von einem Kreis ansehen, dessen Halbmesser CA ist; dieser Kreis ist also der Krümmungskreis, C allemal dieses Krümmungskreises Mittelpunkt, und CA der Halbmesser der Krümmung für den Punkt A der Conchoide. Es erhellet hieraus, daß sich die Conchoidenlinie BKAa nur allmählig von der Kreislinie entfernt und ihrer Axe be als Asymptote immer paralleler wird. Diese Krümmung ist nun der Gestalt der Dauben eines Fasses völlig gemäß, und ich glaube daher mit Recht, ein Faß als das Sphäroid einer Conchoide ansehen zu können; ich rede indessen hier blos theoretisch von der Sache, da die wirkliche Berechnung in der Ausübung wohl zu schwierig, und in dieser Absicht die Lambertsche noch allemal vorzuziehen wäre.

Uebrigens muß ich noch erinnern, daß Nicomed der Erfinder dieser Linie ist, von dem sie auch deswegen den Namen führt, und da Proclus schon dieses Geometern erwähnt, so ist diese Linie schon über 1300 Jahre alt.

Von

Von den geometrischen Oertern.

Es wird nicht unnütz sein, zur Erläuterung dieser Materie noch folgende Sätze beizufügen.

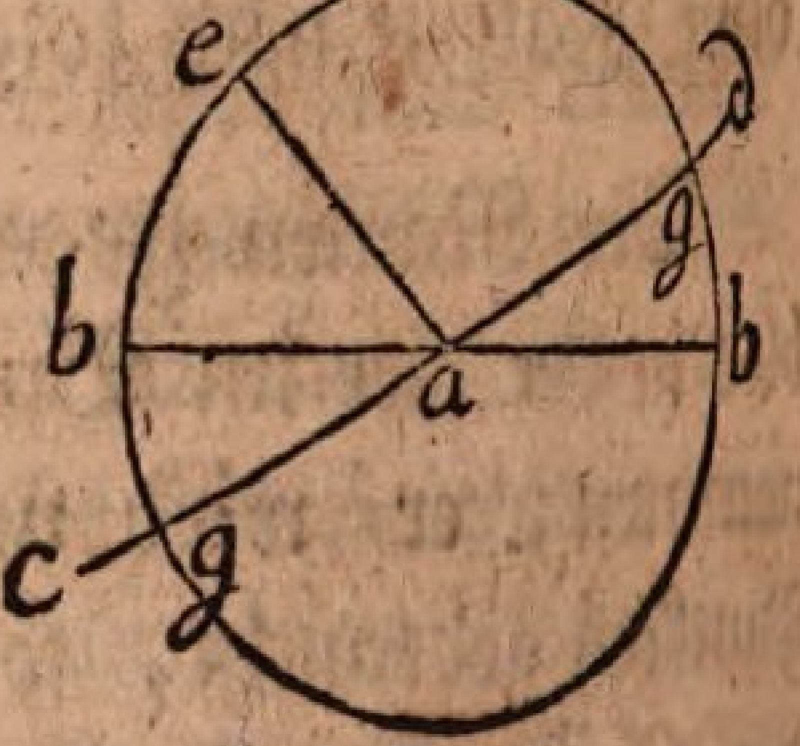
Der Namen geometrischer Ort wird nicht blos in der hier im Buche erklärten Bedeutung genommen; er wird nämlich ausserdem auch von Punkten gebraucht, so daß die Linie, in der nach der Aufgabe ein gewisser Punkt liegen muß, auch dieses Punkts geometrischer Ort heißt, wie ich mich dieses Namens schon in der Erläut. S. 206. bedient habe.

Ex. I. Einen Punkt anzugeben, der von einer gegebenen graden Linie um eine gewisse Entfernung absteht. Hier ist der Aufgabe oder des gesuchten Punkts geometrischer Ort eine grade Linie, die der gegebenen gleichlaufend ist.

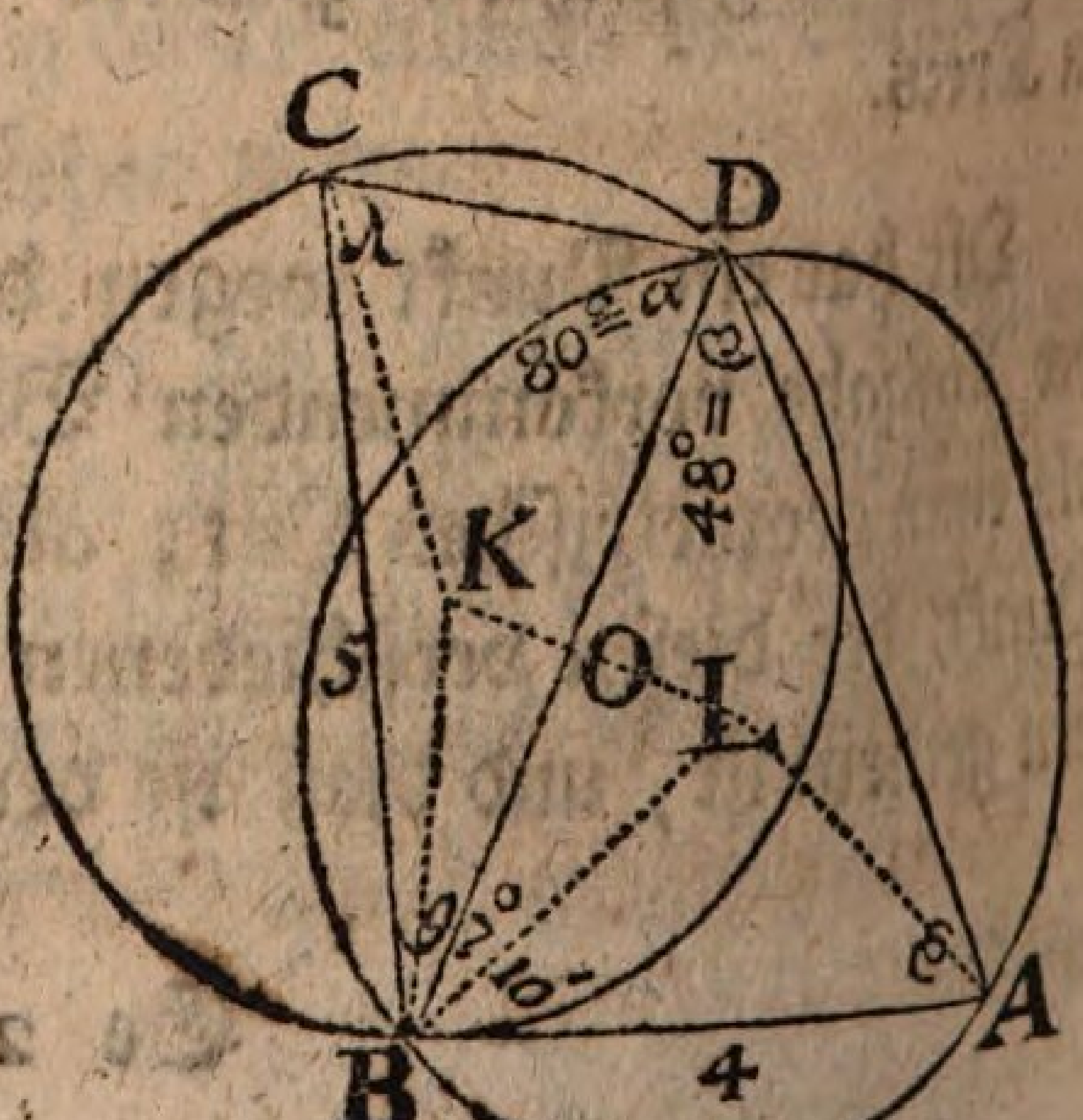
II. Einen Punkt anzugeben, der von einem gegebenen um eine gewisse Entfernung absteht; hier ist des gesuchten Punkts geometrischer Ort ein Kreis.

Oft hat ein Punkt wegen der verschiedenen in der Aufgabe vorkommenden Bestimmungen mehr als einen geometrischen Ort; alsdann giebt es einen Punkt, der diesen verschiedenen geometrischen Oertern gemein ist, und dieß ist der gesuchte.

Ex. I. Man sucht einen Punkt, der von a um eine Entfernung = ae absteht, und der eine solche Lage hat, daß eine Linie durch ihn und a gezogen mit einer durch a gezogenen Linie ab einen gegebenen Winkel macht. Hier hat der gesuchte Punkt zween geometrische Oerter; der erste ist ein Kreis, der ab zum Halbmesser hat, der zweete eine grade Linie cd, die mit ab den gegebenen Winkel macht; in g, wo beide Oerter, der Kreis und die grade Linie einander begegnen, ist der gesuchte Punkt, der also hier zweimal vorhanden ist. Dergleichen Aufgaben, wo Punkte gesucht werden, die durch verschiedene geometrische Oerter bestimmt werden, können selbst in der practischen Geometrie vorfallen, da sogar ganz einfache geometrische Aufgaben solche Linien zu geometrischen Oertern haben können, die noch von höhern Ordnungen sind, als von der zwoten.



Ex. I. Von dem Viereck ABCD ist AB = 4, BC = 5, ABC = 97° 10′, BDC = α = 80°, β = 48° gegeben, man sucht den Ort des Pkts D.



Aufl. I. Der zu BC und α gehörige Halbmesser ist, wie die Gleichung $r = \frac{p}{2 \sin \psi}$ (E. S. 34.) ergiebt, $= \frac{BC}{2 \sin \alpha}$, also mache man mit dem Halbmesser $CK = BK = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$ Durchschnitte in K, und beschreibe aus K mit KC den Kreis, den die Figur zeigt, dieser ist der Ort des Punkts D. Eben so ist der zu AB und β gehörige Halbmesser $= AB : 2 \sin \beta$, mit diesem mache man aus B und A Bögen die einander in L schneiden, und beschreibe nun aus L mit dem Halbmesser $AL = BL$ den zugehörigen Kreis, so muß dieser gleichfalls des Punkts D geometrischer Ort sein.

Der Punkt also, den beide Oerter mit einander gemein haben, wie hier D, bestimmt die Stelle des gesuchten Punkts, und nun kann man das ganze Viereck ABCD leicht verzeichnen.

II. Durch Rechnung giebt sich die Lage des Punkts D so. Es sei $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, und $ABC = \omega$, so ist

$$\sin \varphi = - \sin (\omega + \alpha + \beta + \lambda)$$

$$\frac{a . \sin \lambda}{\sin \alpha} = BD = \frac{- c . \sin (\omega + \alpha + \beta + \lambda)}{\sin \beta}$$

 also

also

$$a. \sin\beta . \sin\lambda = -c. \sin\alpha . \sin(\omega+\alpha+\beta+\lambda)$$

und

$$a. \sin\beta = \Big(-c. \sin\alpha . (\sin(\omega+\alpha+\beta). \mathrm{Cos}\,\lambda + \mathrm{Cos}(\omega+\alpha+\beta). \sin\lambda\Big) : \sin\lambda$$

$$= -c. \sin\alpha\, (\sin(\omega+\alpha+\beta). \mathrm{Cot}\,\lambda + \mathrm{Cos}(\omega+\alpha+\beta))$$

Mithin

$$\mathrm{Cot}\,\lambda = \frac{-\frac{a}{c}.\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \mathrm{Cos}(\omega+\alpha+\beta)}{\sin(\omega+\alpha+\beta)}$$

$$= -\frac{a}{c}.\frac{\sin\beta}{\sin\alpha . \sin(\alpha+\beta+\omega)} - \mathrm{Cot}(\alpha+\beta+\omega)$$

und nun hat man auch den Punkt D. Man findet diese überaus wichtige Aufgabe von mehrern Schriftstellern analytisch aufgelößt z. E. von Hrn. Lambert in den Beiträgen zum Gebr. der Mathem. I. Th. 73. f. S. auch hat Tempelhof in seiner vollst. Anl. zur Alg. eine allgemeine Formel angegeben, die aber selbst nach Herrn Hofrath Kästners Urtheil lange nicht so geschmeidig und zur Ausübung so bequem sind, als die meinige. Zum Beweis, wie tief sich dieser große Geometer, den ich nicht blos als meinen ehemaligen Lehrer, sondern selbst als meinen Gönner und Wohlthäter verehre, zu Lehrlingen herabläßt, muß ich noch erwähnen, daß

daß er mir nicht nur die gleichfolgende dritte Auflößung dieser Aufgabe zu geben die Gütigkeit gehabt, sondern selbst zu der vorigen mir noch folgende Zusätze mitgetheilt hat:

Von den beiden Winkeln φ, λ, hat man die Summe $\varphi + \lambda = 360^\circ - (\alpha + \beta + \omega)$ und die Verhältnis ihrer Sinussen

$$\sin\varphi : \sin\lambda = a.\sin\beta : c.\sin\alpha$$

Die Aufgabe ist also von der Art, wie die in der gemeinen Trigon. aus zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, die Winkel zu finden. Zu dieser Aufgabe steht eine Formel I. Astron. Abh. 41. und es ist $\alpha + \beta = \gamma$ gesetzt

Dorten	γ	$\sin\gamma$	$\mathrm{Cos}\,\gamma$	α
hier	$\omega+\gamma-180^\circ$	$-\sin(\omega+\gamma)$	$-\mathrm{Cos}(\omega+\gamma)$	φ
Dorten	β	a	b	
hier	λ	$a.\sin\beta$	$c.\sin\alpha$	

Daher wird die Formel dorten (53) hier

$$\mathrm{tang}\,\lambda = -\frac{c.\sin\alpha.\sin(\omega+\gamma)}{a.\sin\beta + c.\sin\alpha.\mathrm{Cos}(\omega+\gamma.)}$$

$$= \frac{-1}{\frac{a}{c}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha.\sin(\omega+\gamma)} + \mathrm{Cot}(\omega+\gamma)}$$

welches umgekehrt vorige Formel für Cot λ giebt.

Man hat auch aus angef. Astron. Abh. die halbe Summe und halbe Differenz der gesuchten Winkel so

Dorten	$\frac{1}{2}\gamma$	$\text{Cot}\,\frac{1}{2}\gamma$
hier	$\frac{\omega+\gamma}{2} - 90^\circ$	$-\text{tang}\,\frac{(\omega+\gamma)}{2}$

Dieß giebt $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi+\lambda) = -\text{tang}\,\frac{1}{2}(\omega+\gamma)$, oder $\frac{1}{2}(\varphi+\lambda) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\omega+\gamma)$, welches ohnedem gleich die Figur zeigt. Ferner

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda) = -\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\omega+\gamma).\,\frac{a.\sin\beta - c.\sin\alpha}{a.\sin\beta + c.\sin\alpha}$$

oder
$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\omega+\gamma).\left(\frac{1-\frac{a.\sin\beta}{c.\sin\alpha}}{1+\frac{a.\sin\beta}{c.\sin\alpha}}\right)$$

Für die angegebenen Werthe geschieht die Berechnung hier so: weil $a^2 + c^2 > b^2$, so ist ω stumpf. Nun ist, wenn statt ω, $b = 6$, gegeben wäre, $a+b+c = 15$, $a+b-c = 7$, $a+c-b = 3$, $b+c-a = 5$, also $\sin\omega = \frac{\sqrt{(15.7.3.5)}}{2.4.5} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$:

Fer-

Ferner $10 + \log 3 = 10,4771212$

$\frac{1}{2} \log 7 = 0,4225490$

$10,8996702$

$\log 8 = 0,9030900$

$\log \text{tab} \sin \omega = 9,9965802$

gehört zu $82^\circ\ 49'\ 10''$

also $\omega = 97^\circ\ 10', 50''$

$\gamma = 128^\circ$

$\omega + \gamma = 225^\circ\ 10'\ 50''$

$\frac{1}{2}(\omega + \gamma) = 112^\circ\ 35'\ 25''$

$-\text{tg}\,(67^\circ\ 24'\ 35'') = \text{tang}\ \frac{1}{2}(\omega + \gamma)$

Nun ist $\frac{a}{c} = \frac{5}{4} = 1,25$, also

$\log \sin \beta = 9,8710735$

$\log \frac{a}{c} = 0,0969100$

$9,9679835$

$\log \sin \alpha = 9,9933515$

$0,9746320 - 1$

giebt $\frac{a. \sin \beta}{c. \sin \alpha} = 0,94326$; daher

$$\frac{1 - \frac{a. \sin \beta}{c. \sin \alpha}}{1 + \frac{a. \sin \beta}{c. \sin \alpha}} = \frac{0,05673}{1,94326}$$

Ich brauche log tang 67° 24′ 30″ statt

$$\begin{array}{rl} \log tg \tfrac{1}{2}(\omega+\gamma) = & 10,3808136 \\ \log 0,05673 = & 0,7538128 - 2 \\ \hline & 9,1346264 \\ \log 1,9433 = & 0,2885399 \\ \hline \log tg \tfrac{1}{2}(\varphi-\lambda) = & 8,8460865 \end{array}$$

Diese Tangente ist verneint, weil tang $\frac{1}{2}(\omega+\gamma)$ verneint ist. Also schließt man, sie gehöre einem verneinten Bogen zu, weil sie sonst, wenn sie einem beiahten Bogen zugehörte, $\frac{1}{2}(\varphi-\lambda)$ stumpf, folglich $\varphi-\lambda > 180°$ gäbe, welches offenbar nicht sein kann. Solchergestalt gehört der gefundene Logarithme eigentlich zur tang $\frac{1}{2}(\lambda-\varphi)$, und es ist

$$\begin{array}{rlll} \tfrac{1}{2}(\lambda-\varphi) = & 4° & 0' & 47''. \\ \tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi) = & 67 & 24 & 35. \\ \hline \lambda = & 71 & 25 & 22. \\ \varphi = & 63 & 23 & 48. \end{array}$$

III. Die folgende Aufl. soll nur zur Erläuterung der geom. Oerter, nicht zum wirklichen Gebrauch dienen. Man suche zuerst die Lagen der beiden Mittelpunkte K, L, wie vorhin gezeigt worden ist; der Winkel $KBE = \omega - CBK - ABL = \omega - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \omega + \alpha + \beta - 180°$. Im Dreieck KBL hat man BK, BL, KBL, also

so KL, die h heißen mag. KL steht senkrecht auf BD und halbirt BD in O; man suche $LO = x$, $OD = y$; $KD^2 - KO^2 = LD^2 - LO^2$ d. i. wenn man die Halbmesser CK, BL; f, g heißt, $f^2 - (h - x)^2 = g^2 - x^2$ oder $f^2 - h^2 + 2hx - x^2 = g^2 - x^2$, oder $x = \frac{g^2 + h^2 - f^2}{2h}$; da man nun x durch gegebene Grössen hat, so hat man auch $y = \sqrt{(g^2 - x^2)}$, folglich auch $BD = 2y$. Im Dreieck BAD hat man die Seiten AB, BD, und den Winkel ADB, also findet man AD; im Dreieck DBC hat man die Seiten BD, BC, und den Winkel CDB, also findet man CD. So hat man des Punkts D Entfernung von den drei gegebenen. Ist es nöthig, so findet man auch die Winkel der Dreiecke. Es könnte einem einfallen, die Weiten $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$, unmittelbar zu suchen. Das gienge so an (Trig. 20. S. Zus.)

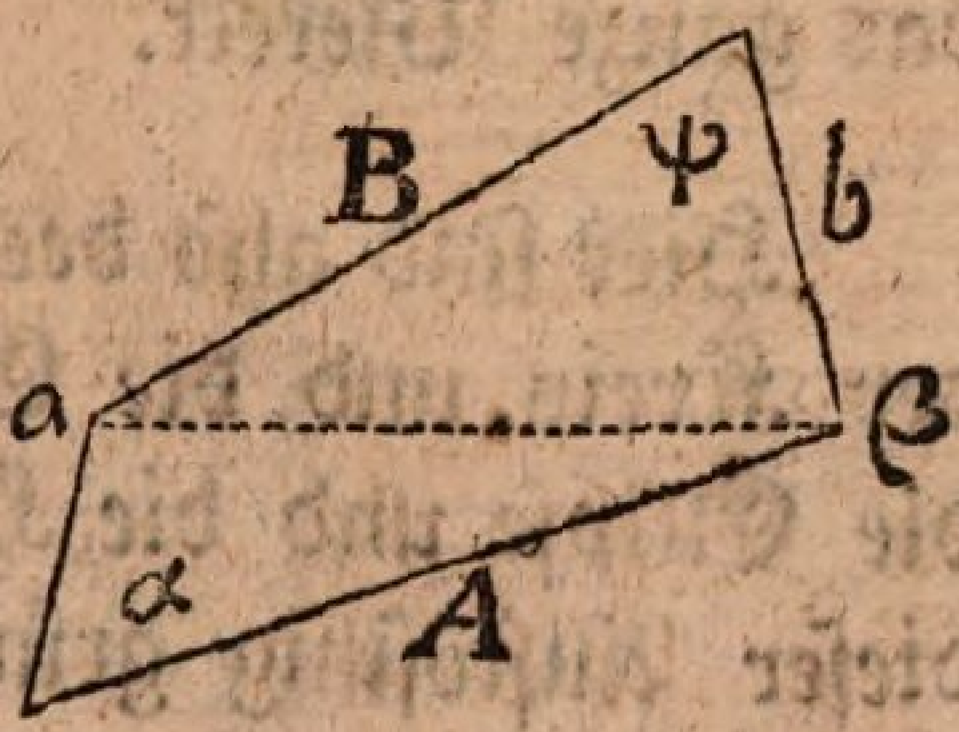
$$x^2 + y^2 - 2xy . \operatorname{Cos} \beta = c^2 \text{ aus } \triangle ADB$$
$$y^2 + z^2 - 2zy . \operatorname{Cos} \alpha = a^2 \quad \triangle BDC$$
$$x^2 + z^2 - 2zx . \operatorname{Cos} (\alpha + \beta) = b^2 \quad \triangle ACD$$

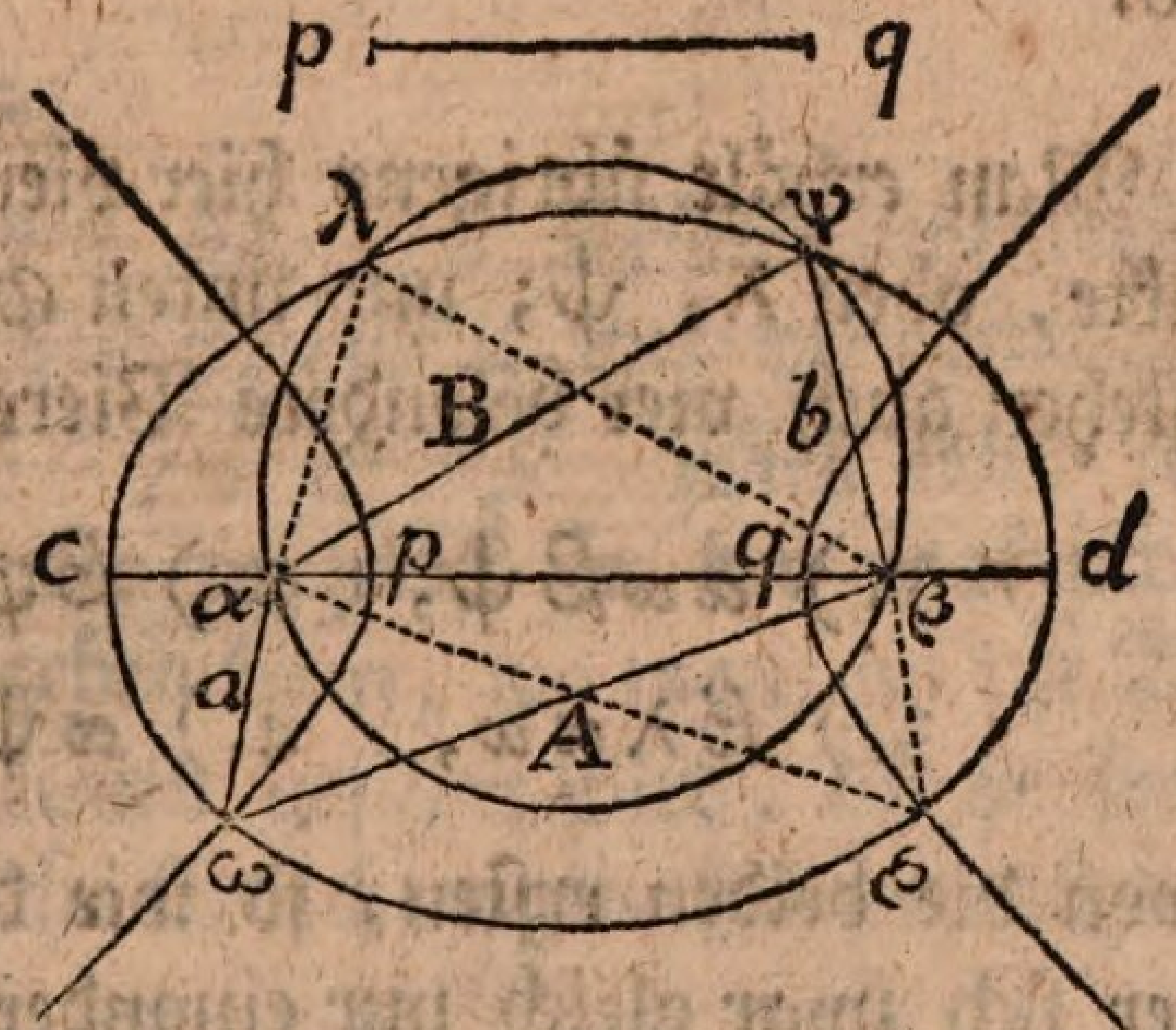
Aus diesen drei Gleichungen läßt sich eine machen, in der nur eine einzige unbekannte Grösse ist (im Buche 102.) Aber diese Gleichung muß zum wenigsten vom dritten Grade sein. Denn ihre unbekannte Grösse sei z. E. x, so hat man von x nichts angenommen, das nicht auch von y und z gól-

z gölte, nur die gegebene Grösse ändert z. E. β in α, c in a. Und die gegebene Grössen sind alle zusammen in der letzten Gleichung, also muß in dieser Gleichung x zugleich auch y und z bedeuten; oder sie hat gewiß drei Wurzeln. Man müßte also wenigstens eine cubische Gleichung auflösen, und wenn man dieses, welches so gar leicht nicht ist, gethan hätte, müßte man erst wieder untersuchen, welche von ihren drei Wurzeln AD oder BD oder CD wäre. In der bisherigen Rechnung könnte sich manches ändern, wenn die Lage der vier Pkte gegen einander von der, welche die Figur darstellt, sehr verschieden wäre. Z. E. die beiden Pkte K, L, könnten beide auf der Seite von BD liegen, auf der A liegt; da wäre $x > h$, und $h - x$ verneint. Lägen K, L, beide auf der Seite von BD, wo C liegt, so bekäme ein x einen verneinten Werth. Wäre α stumpf, so läge K nicht auf der Seite von BC, auf der BD liegt, sondern auf der entgegengesetzten. Nämlich KBC = KCB würden verneint. Eben so, wenn β stumpf wäre, lägen L und BD auf entgegengesetzten Seiten von AB; D könnte selbst innerhalb des Dreiecks ABC liegen; da wäre $\alpha + \beta = 180°$. Wenn man auf die bejahten und verneinten Grössen acht hat, wendet man leicht die vorige Formeln auf jeden vorkommenden Fall an; oder man kann sich auch für einen gegebenen Fall die Figur nur obenhin entwerfen, und alsdann eine solche Reihe Schlüsse, wie bei

bei gegenwärtiger Figur sind gemacht worden, anbringen, da man allemal auch das verlangte finden wird.

Ex. II. Aus der Summe der beiden obern Seiten B, b; dem Winkel ψ; der Summe und Differenz der beiden untern A, a; und der Diagonale α β; das Viereck zu verzeichnen, ohne die Seiten zuvor trigonometrisch zu berechnen.





Aufl. Das obere Dreieck α ψ β wird völlig, wie (S. 205.) gesucht, und durch den Kreis und die Ellipse, deren Brennpunkte α, β, in der gegebenen Entfernung der Diag. α β von einander liegen, und deren Axe c d = B + b ist, bestimmt

Nun sei die Differenz der beiden untern Seiten die Linie p q, so nehme man auf α β ein Stück = p q, so daß p α = q β wird, und sehe dieß als

die

die Axe einer Hyperbel an, deren Spitzen p, q; und Brennpunkte α, β sind; nun verzeichne man die so bestimmte Hyperbel auf eben die Art, wie die Ellipse, so erhält man den Durchschnittspunkt der Ellipse mit der Hyperbel bei ω, und dadurch das ganze Viereck.

Hier sind also des Pkts ψ geometrische Oerter der Kreis und die Ellipse; und des Pkts ω seine die Ellipse und die Hyperbel, und der Beweis zu dieser Auflösung gründet sich ganz auf 378 und 406.

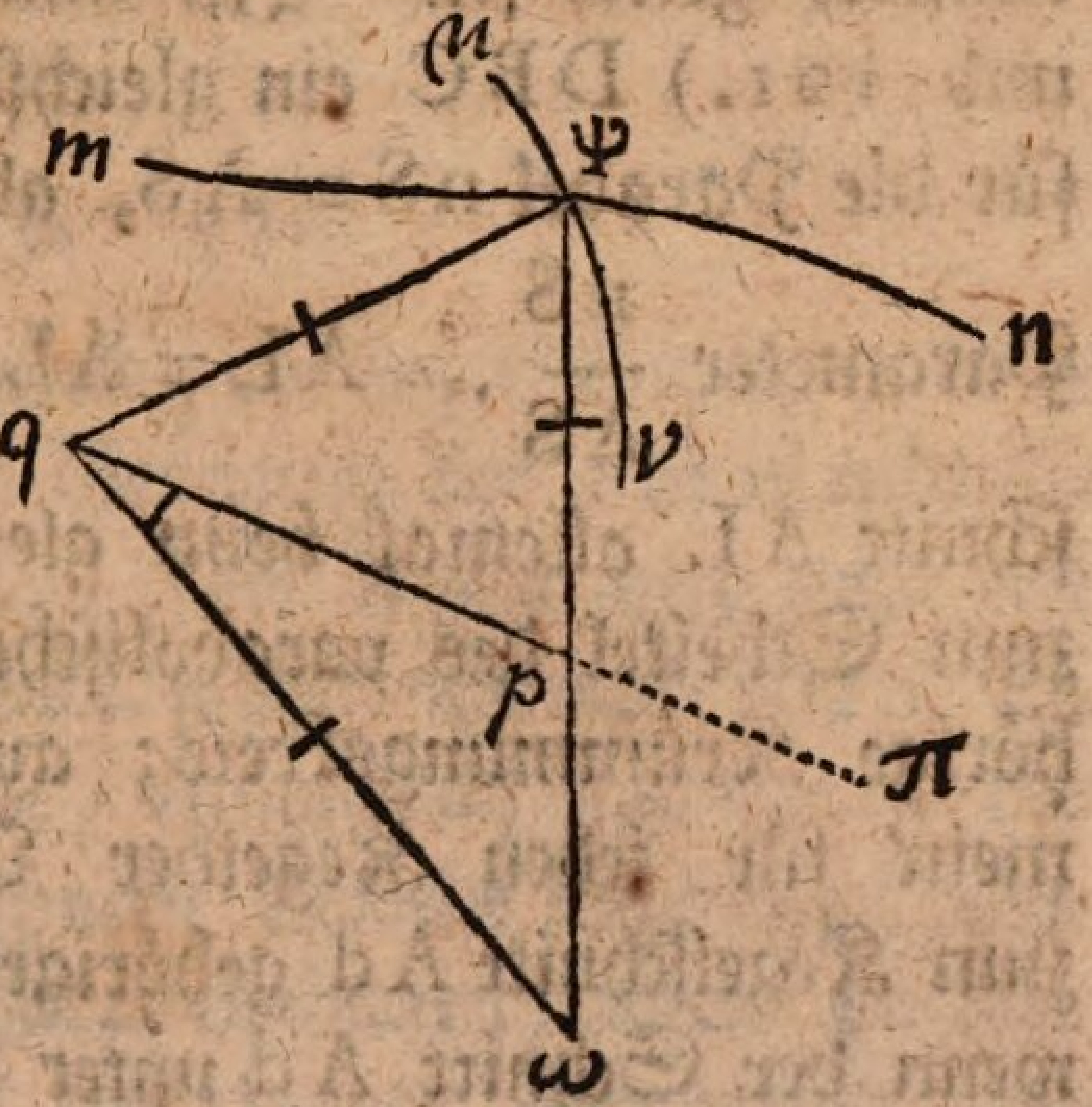
Man erhält übrigens hier vier Durchschnittspunkte, oben λ, ψ; und unten ϕ, ω, und daher entstehen auch vier besondere Vierecke

1.) $\alpha\omega\beta\psi$, 2.) $\beta\phi\alpha\lambda$
3.) $\beta\lambda\alpha\omega$, 4.) $\alpha\psi\beta\phi$

wovon die beiden ersten, so wie die beiden letzten unter sich zwar gleich nur einander entgegengesetzt, jene aber von diesen völlig verschieden sind, ob sie gleich alle vier einerlei Inhalt haben. Dieß wird zugleich Anfängern begreiflich machen, wie man bei dergleichen Aufgaben unvermuthet auf biquadratische Gleichungen gerathen kann.

Er.

Ex. III. Es ist in dem Dreieck $\omega\psi q$, das willkührlich durch $q\pi$ getheilt ist, der Winkel $pq\omega$, ψq, ωq und $p\psi$ gegeben, man soll ωp, also $\omega\psi$ finden. Hier ist des Punkts ψ Ort 1.) der Kreis $\mu\psi\nu$, dessen Halbmesser $q\psi$ ist, 2.) die Conchoide $m\psi n$, deren Asymptote $q\pi$, und da des Krümmungskreises (Erl. §. 477.) Mittelpunkt ω, und die beständige Linie a (§. 479.) $= p\psi$ ist *). Dieß wird Anfängern zeigen, wie es selbst in der praktischen Geometrie Fälle geben kann, wo man auf die Betrachtung solcher Linien geführt wird, die sie sonst nur für geometrische Erdichtungen halten mögten.



§. 504.

Aus der Gleichung (Erl. S. 209.)

$$r = \frac{1}{2} a$$

folgt, daß der Halbmesser der Krümmung am Schei-

*) Es ist sehr leicht, die Muschellinie oder Conchoide $m\psi n$ durch eine stetige Bewegung, wie hier eigentlich erfodert wird, zu beschreiben, und weil jeder von selbst auf solches Mittel verfallen kann, so halte ich mich nicht dabei auf.

Scheitelpunkt eines Kegelschnitts dem halben Parameter gleich sei. Ist nun (E. S. 101. 111. und 121.) DBC ein gleichseitiger Kegel, so ist für die Parabel nS = AS, also in diesem Fall der Parameter $\frac{nS}{AS} \cdot AL = AL$, folglich ist der Querschnitt AL allemal beim gleichseitigen Kegel der zum Scheitel des parabolischen Schnitts Ad gehörige Krümmungskreis; ausserdem giebt allgemein für jeden Kegel der Querschnitt AL den zum Kegelschnitt Ad gehörigen Krümmungskreis, wenn der Schnitt Ad unter dem Winkel dAC = BCD geführt wird, weil in solchem Fall AL allemal des Kegelschnitts Parameter wird.

§. 508.

Die Auflösung der Aufgabe: zwischen zwo gegebenen Grössen g und 2g zwo mittlere Proportgr. durch Rechnung zu finden, findet sich schon oben S. 19. Es wird nämlich die erste davon $= g\,\sqrt[3]{\frac{2g}{g}}$ $= g\,\sqrt[3]{2}$, die zwote $= (g\,\sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{2} = g\,\sqrt[3]{4}$, wenn man daselbst a = g, u = 2g und m = 2 setzt.

§. 516.

Wenn also die Lage eines Punkts durch eine Gleichung zwischen drei Coordinaten x, y, z, bestimmt wird, so ist der Aufgabe, worin dieser

Punkt

Punkt gesucht wird, oder des gesuchten Punkts geometrischer Ort eine Fläche (locus ad superficiem S. unten §. 570.)

§. 576.

Folgende Anwendung der logarithmischen Linie wird etwas von dem Gebrauch der transscendentischen Linien beweisen. Ihre Natur wird zwar erst in der Anal. des Unendl. wohin ich auch (Erl. S. 231.) verwiesen habe, entwickelt; aus der in der Vorerinnerung erwähnten Ursache wird man mich indessen nicht mit Tadel bestrafen, wenn ich hier so viel aus der Anal. des Unendl. voraussetze, als zur Betrachtung dieser Linie erfodert wird. Man kann das folgende als einen Zusatz zu Hrn. Lamberts Beiträgen in der Abhandlung über die Sterblichkeit, und zwar als das achte Capitel ansehen, worin ich den Gebrauch der logarithmischen Linie bei Betrachtung der Vermehrung der Menschen zeigen will. Man findet hierüber beim Süßmilch eine eigene Abhandlung im 8. Cap. Da aber diese Abhandlung nicht allgemein genug ist, indem nur von der Verdoppelungszeit besonders darin geredet wird, und daselbst in diesem Stück nicht hinlänglich gezeigt wird, wie sich dergleichen Tabellen z. B. die im 152. §. worauf sich die ganze Abhandlung gründet, berechnen lassen, so verdient die Sache allerdings besser aus einander gesetzt und allgemeiner vorgetragen zu werden. Wo α Menschen

leben, Einer von λ stirbt, und die Verhältnis der Gestorbenen zu den Gebohrnen $= \beta : \gamma$ ist, da ergiebt sich die Anzahl von Jahren, binnen welchen eine mfache Vervielfältigung erfolgt, auf folgende Art. Da von λ jährlich Einer stirbt, so ist die Anzahl der von α jährlich sterbenden $= \frac{\alpha}{\lambda}$; da nun die Anzahl der Gestorbenen: Zahl der Gebohrnen $= \beta : \gamma$, so ist $\beta : \gamma = \frac{\alpha}{\lambda} : z$, also z oder die Zahl derer, welche an einem Ort, wo sich α Menschen befinden, jährlich gebohren werden, ist $= \frac{\alpha\gamma}{\beta\lambda}$, folglich die Differenz der Gebohrnen und Gestorbenen, oder der Ueberschuß der Gebohrnen

$$= \frac{\alpha\gamma}{\beta\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$= \frac{\alpha\gamma - \alpha\beta}{\beta\lambda}$$

$$= \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta\lambda} \quad \text{(I}$$

und dieser Ueberschuß ist von der Summe aller Lebenden

$$\frac{\alpha.(\gamma - \beta) : \beta\lambda}{\alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\beta\lambda} \quad \text{(II}$$

daß

daß also die Anzahl der Lebenden jährlich um $\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}$ grösser wird; oder in jedem folgenden Jahr ist die Anzahl der Lebenden

$$1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda} \quad \text{(III.}$$

mal so groß, als in dem zunächst vorhergehenden. Man erhält demnach die Anzahl von Jahren, die zur mfachen Vervielfältigung erfordert werden, wenn man die Anzahl der Glieder einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied $\alpha\left(1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)$ das letzte m α und der Exponent $1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}=\frac{\beta\lambda+\gamma-\beta}{\beta\lambda}$ ist, berechnet; am Ende des ersten Jahrs sind nämlich $\alpha.\left(1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)$, am Ende des zweiten $\alpha.\left(1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)^2$ u. s. w. am Ende des nten $\alpha.\left(1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)^n$ Menschen vorhanden; soll nun das letzte Glied m α sein, so hat man

$$m\alpha = \alpha . \left(1 + \frac{\gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)^n \quad (P.$$

oder

$$m = \left(1 + \frac{\gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)^n$$

also

$$l\,m = n\,l\left(1 + \frac{\gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)$$

und

$$n = \frac{l\,m}{l\left(1 + \frac{\gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)}$$

oder

$$n = \frac{l\,m}{l(\beta\lambda + \gamma - \beta) - l(\beta\lambda)} \quad (T.$$

Der Ausdruck $l(\beta\lambda)$ ist aus dem Grund hier bequemer, als der $l\beta + l\lambda$, weil $\beta\lambda$ gewiß niemals grösser als 10000 ist, und daher $l(\beta\lambda)$ allemal noch in den gemeinen Logarithmentafeln zu finden ist. Hieraus ergiebt sich also folgendes:

Wenn

Wenn in einem Lande α Menschen leben, und Einer von λ stirbt

und es verhalten sich sodann die Gestorbenen zu den Gebohrnen	so wird der Ueberschuß der Gebohrnen sein	Dieser Ueberschuß der Gebohrnen ist von der Summe aller Lebenden	und also erfolgt die einfache Vervielfältigung in
$\beta : \gamma$	$\frac{\alpha.(\gamma-\beta)}{\beta\lambda}$	$\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}$	$\frac{l\,m}{l(\beta\lambda+\gamma-\beta)-l\beta\lambda}$ Jahren.

Ex. Für $\beta:\gamma = 10:13$, und $\lambda = 36$, wird

$$l(\beta\lambda+\gamma-\beta)=2,5599066$$

und $l\beta\lambda = 2,5563025$

also $l(\beta\lambda+\gamma-\beta)-l\beta\lambda=0,0036041$

und $$n = \frac{0,3010300}{0,0036041} = 83,5$$

Für $\beta:\gamma = 10:14$ wird

$$l(\beta\lambda+\gamma-\beta)=2,5611014$$

$$l\beta\lambda = 2,5563025$$

also $l(\beta\lambda+\gamma-\beta)-l\beta\lambda=0,0047989$

und daher $$n = \frac{0,3010300}{0,0047989} = 62,7$$

wie im Süßm. a. a. O.

Nimmt man ein Paar rechtwinklichte Coordinaten AH, AB, jene zur Abscissen- diese zur Applicatenaxe an, so kann man auf AB ein Stück $Ab = \alpha$ nehmen; nimmt man alsdann auf AH eine Abscisse AC für eine beliebige Anzahl von Jahren $= n$, und sucht nun wie vorhin aus $\alpha.\left(1+\frac{\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)$, n, und $\frac{\beta\lambda+\gamma-\beta}{\beta\lambda}$ die zu $AC = n$ gehörige Ordinate CD, welche die Anzahl der nach n Jahren lebenden Menschen bezeichnet, d. i. aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und dem Exponenten einer geometrischen Reihe das

das letzte Glied, welches u heissen mag, so ergiebt sich aus P, wenn man daselbst u statt m α setzt,

$$l\,u = n.\,l\left(\frac{\beta\lambda+\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)+l\,\alpha$$

$$\text{oder } u = \left(\frac{\beta\lambda+\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)^{n}\cdot\alpha$$

oder, statt u, n; y, x gesetzt, giebt

$$y = \left(\frac{\beta\lambda+\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)^{x}\cdot\alpha\ (Q$$

Trågt man also das Perpendikel CD = $\left(\frac{\beta\lambda+\gamma-\beta}{\beta\lambda}\right)^{x}\cdot\alpha$ in C, so hat man die zur Abscisse AC = x gehörige Ordinate y, welche anzeigt, wieviel Menschen nach x Jahren vorhanden sind. Auf eben die Art ergiebt sich die zu jeder andern Abscisse AE gehörige Ordinate EF, wo nämlich EF die Anzahl von Menschen bedeutet, welche nach so viel Jahren, als AE anzeigt, vorhanden sind. Man sieht leicht, daß wenn man auf diese Art die zu jeder Abscisse AC, AE, AG, gehörige Ordinate CD, EF, GH sucht, man dadurch eine krumme Linie bDFH erhält, in der die Abscissen Jahre, und die ihnen zugehörige Ordinaten die nach diesen Jahren lebende Menschen vorstellen. Nur muß man bei Verzeichnung dieser krummen Linie bestimmen, wie groß die einem Jahr

zugehörige Abscisse sein soll, und hätte man sie ohne zu wissen, wie groß man die Abscisse für ein Jahr oder überhaupt für eine gegebene Zeit nehmen müsse, so könnte man so verfahren. Man schneide auf der Abscissenaxe ein x nach Willkühr ab, nehme das dazu gehörige y, und messe α und y auf einem genauen verjüngten Maaßstab; fände man nun $\alpha = \varphi'$, $y = \psi'$, so hat man

$\varphi : \psi = 100000 : \frac{100000 . \psi}{\varphi}$, diese letzte Zahl ist nämlich die Anzahl der lebenden Menschen y, wenn α deren 100000 bedeutet. Aus Q ergiebt sich nun

$$x = \frac{l\left(\frac{100000\ \psi}{\varphi}\right) - l\ 100000}{l(\beta\lambda + \gamma - \beta) - l\beta\lambda}$$

$$= \frac{l\ \psi - l\ \varphi}{l(\beta\lambda + \gamma - \beta) - l(\beta\lambda)}$$

dieses x ist die zu $y = \frac{\psi}{\varphi} \cdot 100000$ gehörige Anzahl von Jahren; theilt man also das in der Figur nach Willkühr abgeschnittene x in $\left(\frac{l\psi - l\varphi}{l(\beta\lambda + \gamma - \beta) - l(\beta\lambda)}\right)$ Theile, so ist dasjenige x, das einem solchen Theile gleich ist, die zu einem Jahr gehörige Abscisse,

der

der man sich nun als eines Maaßes für jede andere Abscisse bedienen kann.

So ist also die krumme Linie bDFH eine allgemeine Vorstellung von der Vermehrung der Menschen in einem Lande, wo im Anfang der Zeit x so viele vorhanden sind, als durch Ab vorgestellt wird, und weil von ihrer Gestalt die Bevölkerung in einem Staate abhängt, so kann man sie die zu einem Lande gehörige Bevölkerungslinie nennen. Die Gleichung für diese Bevölkerungslinie ist (Q) oder auch

$$l\,y = x . l\left(\frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}\right) + l\,\alpha$$

daraus folgt

$$x = \frac{l\,y - l\,\alpha}{l\left(\frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)}$$

$$= \frac{l\,y}{b} - \frac{l\,\alpha}{b}$$

wenn die beständige Grösse $l\left(\frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}\right) = b$ gesetzt wird. Für eine andere Abscisse X und Ordinate Y wird eben so

$$X = \frac{l\,Y}{b} - \frac{l\,\alpha}{b}$$

also $x - X = \frac{l\,y}{b} - \frac{l\,Y}{b}$

daß also die Bevölkerungslinie eine logarithmische ist, wie auch aus Q erhellet, da die Ordinaten eine geometrische und die Abscissen eine arithmetische Reihe ausmachen.

Für verneinte Abscissen wie Ac, folgt aus Q

$$y = \left(\frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)^{-x} \cdot \alpha$$

$$= \alpha \cdot \left(\frac{\beta\lambda}{\beta\lambda + \gamma - \beta}\right)^{x}$$

also $cd = \alpha \cdot \left(\frac{\beta\lambda}{\beta\lambda + \gamma - \beta}\right)^{Ac}$

Auf diese Art ergiebt sich die Anzahl der vor x Jahren lebenden Menschen.

Aus der Natur der logarithmischen Linien ist klar, daß die Subtangente desto kleiner ist, je schneller sich die logarithmische Linie von ihrer Asymptote entfernt, weil $\frac{y\,dx}{dy} = a$ desto mehr abnimmt, je kleiner die Verhältnis $\frac{dx}{dy}$ ist. Sie würde sehr groß sein, wenn sich die log. Linie nur sehr wenig von ihrer Asymptote entfernte, und umgekehrt. Daraus wird man schon muthmaßen, daß die Ver-

Vermehrung der Menschen in einem Staate mit der Subtangente der diesem Lande zugehörigen Bevölkerungslinie in einer gewissen Verhältnis stehe, und folgende Betrachtungen werden diese Muthmaßung rechtfertigen.

Die Grösse der Subtangente a zu finden, dient die Gleichung Q, wo

$$y = \left(\frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}\right)^x \alpha$$

wenn man y = 2,718281 ... (Anal. des Unendl. S. 157.) setzt; daraus erhält man nun

$$\frac{l2,718281 - l\alpha}{x} = l(\beta\lambda + \gamma - \beta) - l(\beta\lambda)$$

und $$x = \frac{l\alpha - l\,2,718281\,---}{l(\beta\lambda) - l(\beta\lambda + \gamma - \beta)}$$

Aber diese Absc. ist die Subtangente (Anal. des Unendl. a. a. O.) folglich

$$a = \frac{l\alpha - l\,2,718281\,---}{l(\beta\lambda) - l(\beta\lambda + \gamma - \beta)} \quad (R$$

wo der Zähler für alle Länder als unveränderlich angenommen werden kann, weil man für α ein- für allemal eine gewisse Zahl z. E. 10000 festsetzen, und jede andere in einem gegebenen Fall darauf reduciren kann. Hier werden sich also verschiedener Bevölkerungslinien Subtangenten umgekehrt, wie

wie die Nenner der Brüche (R) verhalten. Bezeichnet man nämlich für eine andere Bevölkerungslinie ähnliche Dinge mit dem ähnlichen großen lat. Buchstaben, so erhält man $A = \frac{l\alpha - l\,2,718281}{l(BL+G-B)}$, also

$$A : a = (l(\beta\lambda) - l(\beta\lambda+\gamma-\beta)) : (l(BL) - l(BL+G-B))$$

Aber wenn N die Anzahl von Jahren bedeutet, nach deren Verlauf in dieser andern Bevölkerungslinie aus α, $m\,\alpha$ wird, so ist aus T

$$N : n = \frac{lm}{l(BL+G-B) - l(BL)} : \frac{lm}{l(\beta\lambda+\gamma-\beta) - l(\beta\lambda)}$$

$$= (l(\beta\lambda) - l(\beta\lambda+\gamma-\beta)) : (l(BL) - l(BL+G-B))$$

Folglich $A : a = N : n$

oder die Subtangenten verschiedener Bevölkerungslinien verhalten sich, wie die Anzahl von Jahren, die bei ihnen zu einerlei Vervielfältigung der anfangs vorhandenen Menschen α gehören. Nun muß aber offenbar die Verhältnis, nach der sich die Menschen in einem Lande vermehren, zu der, nach welcher sie sich in einem andern Lande vermehren, durch die Verhältnis N : n bestimmt werden; werden nämlich in dem ersten Lande zur mfachen Vervielfältigung N Jahre, im andern n Jahre erfodert, so ist die Verhältnis der Verhältnis der Vermehrung im ersten Lande zu der im zwoten = n : N. Ist also A die Subtangente für die Bevölkerungslinie des ersten Staats und a die Subt. für den zweiten Staat, so ist die Vermehrung in jenem

jenem zu der in diesem $= a.A$; oder, die Vermehrung der Menschen in verschiedenen Ländern verhält sich verkehrt, wie die Subtangenten der diesen Ländern zugehörigen Bevölkerungslinien.

Weil der Zähler in dem Werth von $a = l\,\alpha - l\,2,718281$ - - - eine für alle mögliche Bev. Linien unveränderliche Grösse ist, so kann man ihn ein für allemal berechnen, auch wird man für die gegenwärtige Materie, wo ohnehin keine völlig genaue Berechnungen zu erwarten sind, noch Genauigkeit genug beobachten, wenn man von der Zahl 2,71828182 - - - nur die ersten sechs Decimalstellen nimmt, und also den $l\,2,718281$ berechnet; dieser giebt sich so

$$\begin{array}{lrl} \text{Es ist} & l\,2719 & = 3,4344092 \\ & l\,2718 & = 3,4342494 \\ \hline & \text{Differ.} & = \quad 1598 \end{array}$$

also $1:1598 = 0,281 : \text{differ.} (l\,2718,281 - l\,2718)$ und daher

$$l\,2718,281 - l\,2718 = 449,038$$

aber $$l\,2718 = 3,4342494,000$$

also $$l\,2718,281 = 3,4342943,038$$

und dieß giebt

$$l\,2,718281 = 0,4342943;$$

Nachdem man $\alpha = 10000$, oder $= 100000$, oder einer andern Zahl gleich setzt, erhält man auch für

$l\alpha$ eine andere Zahl. An sich ist es willkührlich, wie es in der Trig. willkührlich ist, ob man r = 10000, oder = 100000, oder einer andern Zahl gleich setzt; nur werden auch hier die Rechnungen der Wahrheit desto näher kommen, je grösser man α nimmt; setzt man nun, wie hier am bequemsten sein wird, $\alpha = 10000$, so ist $l\,\alpha = 4$, und der obige Zähler $l\alpha - l\,2{,}718281 = 4 - 0{,}4342943 = 3{,}5657057$. Nähme man für α eine 1 mit mehr oder weniger Nullen als die angenommene 10000 an, so dürfte man nur die vorhin gefundene Characteristik 3 um so viel Einheiten vermehren oder vermindern, als diese letztere mehr oder weniger Nullen bekäme; also ist allgemein die zu jeder Bev. Linie gehörige Subtangente für $\alpha = 10000$

$$\frac{3{,}5657057}{l(\beta\lambda) - l(\beta\lambda + \gamma - \beta)}$$

da λ nie grösser als 50 und nie kleiner als 18 ist, und daher $\gamma : \beta$ allemal zwischen den Gränzen 1 und $\frac{50}{18}$, also gewiß zwischen 1 und 3 liegt, weil vorausgesetzt wird, daß nicht $\beta > \gamma$ sei. Daraus geben sich nun die Gränzen, zwischen welche die Subtangenten aller Bev. Linien fallen werden; die kleinste erhält man nämlich nach dieser Voraussetzung für $\lambda = 50$ und $\gamma : \beta = 3$, und die größte für $\gamma : \beta = 1$, oder $\beta = \gamma$, λ mag übrigens so groß man will sein, die Verhältnis $\gamma : \beta = 1$ zeigt nämlich an, daß die Anzahl der Gestorbenen

der Anzahl der Gebohrnen gleich ist; sterben also λ, so müssen auch λ gebohren werden, und das Land ist in diesem Fall im Beharrungsstand. Daraus läßt sich nun schon schließen, daß die Bev. Linie in diesem Fall sich von ihrer Asymptote nirgends entfernen dürfe, und damit stimmt die Gleichung für a überein, die sich diesem Fall in

$$a = \frac{3,5657057}{0}$$

$$= \infty$$

verwandelt, welches zeigt, daß die Bev. Linie zur graden Linie werde. Für die kleinste Subtangente wird $\lambda = 50$, $\beta = 1$ und $\gamma = 3$, also $\beta\lambda = 50$, $\beta\lambda + \gamma - \beta = 52$, mithin

$$l\,\beta\lambda = 1,6989700$$

$$l(\beta\lambda + \gamma - \beta) = 1,7160033$$

$$\text{Diff} = -0,0170333$$

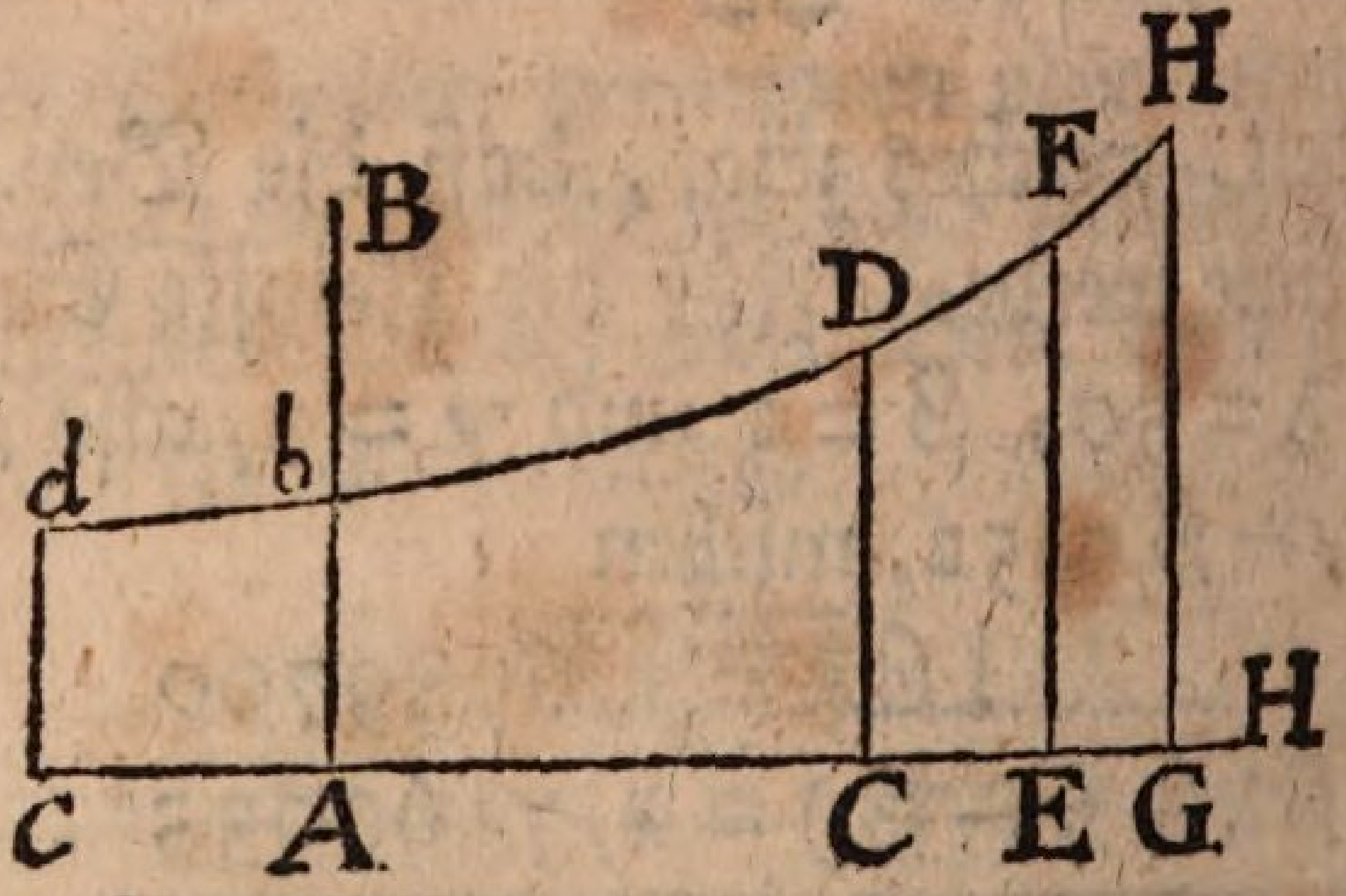
und $$a = -\frac{35657057}{170333}$$

$$\doteq -209,337 \ldots$$

das verneinte Zeichen beweist, daß die Absciſſen und Subtangenten nach entgegengesetzten Gegenden liegen, die letztern nämlich von der Rechten gegen die Linke, wenn die erstern von der Linken gegen die Rechte genommen werden. Also giebt es keine Bevölkerungslinie, deren Subtangente kleiner als

209,

209, oder überhaupt kleiner als $\frac{1}{48}\alpha$ wäre. Setzt man $\alpha = 1$, uud drückt nun die Anzahl der Jahre auf der Abscissenlinie durch diese Einheit aus, so ist die zur Absc. = 1 gehörige Ordinate aus der obigen Gleichung (II.) $= 1 + \frac{\gamma - \beta}{\beta\lambda} = \frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}$, also ist die Bevölkerungslinie eine logarithmische Linie, deren Basis $\frac{\beta\lambda + \gamma - \beta}{\beta\lambda}$ ist.



Tabellarischer Entwurf der in der Kästnerischen Anal. endl. Gr. abgehandelten Materien.

Sie enthält

A. Die Buchstabenrechnung.

I. Die willkührliche Art, Grössen durch Buchstaben auszudrücken, §. 60. 339.

II. Allgemeine Art die gewöhnlichen vier Rechnungsarten in Buchstaben zu verrichten, Arithm. II. §. 1–6. und hier §. 1 – 17.

III. Verschiedene Modificationen der durch Buchstaben bezeichneten Grössen durch beigesetzte Zeichen.

a. Durch Vorsetzung der Zeichen + und –; daher entsteht die Rechnung mit entgegengesetzten Grössen, Arithm. I. §. 96 – 113.

b. Durch Beschreibung gewisser Grössen oben zur Rechten z. B. a^x; daher entsteht die Rechnung mit den Potenzen, Ar. II. §. 7 – 17. und hier §. 19 – 36. §. 116 – 152. §. 752 – 756.

c. Durch Vorsetzung der Zeichen $\sqrt{}$; daher entsteht

1) Die Rechnung mit den Wurzelgrössen oder Irrationalzahlen insbesondere, §. 18–32. §. 228. 229. 232.

2) Die Rechnung mit den unmöglichen Grössen, §. 33–36. §. 230. 231. 232. §. 250–265.

IV. Verschiedene Anwendungen der Buchstabenrechnung, §. 37–50.

B. Die Algebra, §. 51.

I. Was Gleichungen sind

a. überhaupt, und die allgemeinen Grundsätze davon, §. 52–57.

b. Ihre verschiedene Arten

1. Einfache und höhere, §. 58. 72.

2. Bestimmte, mehr als bestimmte, und unbestimmte, §. 70. 71. 179. 213.

3. Reine und unreine, §. 73.

c. Allgemeine Art, sie zu behandlen, und verschiedene allg. Lehrs. §. 191–212.

d. Von den Funktionen in ihnen

1. Ueberhaupt und ihren Eintheilungen.

2. Von solchen, die durch unendliche Reihen ausgedruckt werden

α) Von den Coefficienten, §. 624–627.

β) Von den Exponenten solcher Reihen, und wie man sich des Newton. Parallelogramms dabei bedient, §. 628–698.

II. Von

II. Von der Gleichungen Wurzeln.

a. Was sie seien, §. 74.

b. Ihre Mannigfaltigkeit, Irrationalität, und Unmöglichkeit, §. 233–249. §. 266–272.

c. Von den Veränderungen, die sich damit vornehmen lassen

1. Sie zu vergrössern oder zu vermindern, §. 273–277.

2. Sie zu vervielfältigen oder zu theilen, §. 278–280.

3. Sie so zu verwandeln, daß eine unvollständige höhere Gleichung vollständig werde, §. 281.

4. Daß eine vollständige unvollständig werde, §. 282 – 290.

5. Daß statt des zweiten Glieds, wenn solches nicht da ist, das vorletzte fehlt, §. 291.

6. Daß eine Gleichung, statt der Brüche, lauter ganze Zahlen zu Coefficienten bekommt, §. 292. und

7. Daß eine Gleichung zuweilen statt der Irrationalzahlen lauter Rationalzahlen zu Coeff. erhält, §. 293.

d. Wie durch sie höhere Gleichungen entstehen

1. Quadratische, §. 214–218.
2. Cubische, §. 220.
3. Höhere überhaupt, §. 219. 221–227.

e. Wie man sie findet
1. Durch genaue Berechnung
α. Bei den einfachen Gleichungen
A. Allgemeine Regel, §. 59.
B. Anwendungen davon, §. 61–69.
β. Bei den quadratischen
A. Reinen
a. Allgemeine Regel, §. 75.
b. Anwendung davon, §. 76. 77.
B. Unreinen
a. Allg. R. §. 78.
b. Anw. davon, §. 79.
γ. Bei der cubischen
A. Reinen
a. Allg. R. Erläut. §. 241.
b. Anw. davon, ebendas.
B. Unreinen, §. 699–723.
2. Durch Versuche und Näherung, §. 294–321.

f. Wie man sie durch Zeichnung vorstellt
1. Bei bestimmten Gleichungen, §. 500 – 513.
2. Bei unbestimmten, §. 497–499.

III. Anwendung der Gleichungen

a. Auf die Berechnung gewisser Zahlen
  1. Solcher, die durch unbestimmte Aufgaben verlangt werden, §. 179 – 190.
  2. Solcher, die sich in einer Reihe befinden, deren Glieder nach einem bestimmten Gesetz fortgehen.
    α. Auf die Lehre von den arithm. und geom. Progressionen, §. 80 – 115.
    β. Auf die Berechnung aller höhern Potenzen, §. 310 – 313.
    γ. Auf die Erfindung allgemeiner Formeln der Differenzen und Summen, §. 724 – 726.
    δ. Auf die Berechn. der figurirten Zahlen, §. 727 – 734. §. 749. 750.
    ε. Auf die Lehre von den Verbindungen, §. 735 – 748. §. 51.

b. Auf die Untersuchung ausgedehnter Grössen
  1. Der Linien
    α. In Absicht auf ihre Grösse oder Quantität; auf die Aufl. geom. Aufg. §. 153 – 178.
    β. In Absicht auf ihre Natur oder Qualität
      A. Wie man solche überhaupt durch Gleichungen ausdruckt, §. 322 – 338.
      B. Ihre Eintheilung

a. in algebraische, §. 467.

A. Von ihren verschiedenen Ordnungen und Geschlechtern überhaupt, §. 467. 468.

B. Von ihren verschiedenen Ordnungen insbesondere

(1) Von den Linien der ersten Ordnung, §. 340–348.

(2) Von den Linien der zwoten Ordnung

(a) Ueberhaupt, §. 419–466.

(b) Ihren verschiedenen Arten, oder den Kegelschnitten

(α) Der Parabel, §. 349–361.

(β) Der Ellipse, §. 362–388.

(γ) Der Hyperbel, §. 389–418.

(3) Von verschiedenen Linien der dritten Ordnung, §. 469–474.

(4) Von einer Linie der vierten Ordnnng, §. 477–491.

(5) Von den Linien der höhern

hern Ordnungen überhaupt, §. 492 – 496.

b. In Transcendentische, §. 571 – 577.

A. Von der Spirallinie, §. 578 – 596.

B. Von der Cycloide, §. 597 – 612.

C. Von der Kreislinie, §. 613 – 621.

2. Der Flächen

α. Wie man solche überhaupt durch Gleichungen ausdrückt, §. 514 – 519.

β. Von Flächen, deren Gleichungen gleichartig sind, §. 529 – 544.

γ. Von den Schnitten der Flächen mit Ebenen, §. 520 – 528. §. 549 – 570.

3. Der runden Körper oder Sphäroiden, §. 545 – 548.

Alphabetisches Verzeichnis
der vornehmsten Sachen und Wörter, welche in der Kästnerischen Analysis und in diesen Erläuterungen vorkommen.

E bedeutet diese Erläuterungen.

A.

Abscissen und Abscissenlinie, §. 331.
Algebra, was sie sei, 51.
Achteck, wie sich seine Seite zum Halbmesser des umschriebenen Kreises verhalte, 160.
Asymptote, der Hyperbel, 408. der Cyssoide, 473. der Muschellinie, 478.
Auflösung der Gleichungen, was sie sei, 74. der reinen quadratischen, 75. der unreinen quadratischen, 78. der reinen cubischen, E. 241. der unreinen cubischen, 699.
Aufgaben, bestimmte, 207. mehr als bestimmte, 213. unbestimmte, 179.
Axe, 331. große, 362. kleine, 365. 399.

B.

Berührungspunkt, 449.
Bevölkerungslinie, E. 576.
Beständige Grössen, 323.

Bezeich-

Bezeichnung der Grössen durch Buchstaben, 60. 339.
Binomischer Lehrsatz, 116. sein Erfinder, 146.
Brennpunkt, bei der Parabel, 358. ist ein physischer Brennpunkt, E. 358. bei der Ellipse, 376. ist ein physischer Brennpunkt, E. 376. bei der Hyperbel, 405. ist nur ein geometrischer, E. 405. seine Entfernung vom Scheitel bei der Parab. 359. bei der Ell. 382. bei der Hyp. 405.

C.

Cardanische Regel, 699.
Cissoide, ihre Entstehungsart, 469. ihre Gleichung, 470. ist eine Linie der dritten Ordnung, 471. wird bei Verdoppelung des Würfels gebraucht, E. 469.
Coefficienten, 5. 57.
Combinationen, 735.
Construction der Gleichungen, 500. ist von keinem Nutzen, 507. III.
Coordinaten, 331.
Cosinus des vielfachen Winkels, 175.
Cubatur, der Paraboloide, E. 349. der Ellipsoide, E. 349. *)
Cubikzahlen, ihr Unterschied, 45. Tafeln davon, 49.
Cycloide S. Radlinie.

D.

Differenzen, allgemeine Formeln davon, 724.

Division zusammengesetzter Grössen, 6.
Dreieck, wie sich seine Seite zum Halbmesser des umschriebenen Kreises verhalte, E. 153.
Durchmesser für Linien der zwoten Ordnung, 431. Länge desselben, 433. seine Lage, 444. schneidet einen andern unter einem bestimmten Winkel, 438. und in einem bestimmten Punkt, 440. halbirt eine Reihe paralleler Sehnen unter einem bestimmten Winkel, 433. zusammen gehörige Durchmesser, 445.

E.

Eigenschaften, der Summen Produkte etc. grader und ungrader Zahlen, 37. der Linien, die aus einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel nach beiden Brennpunkten gezogen werden, 378. 406.
Ellipse, ihre Gleichung, 362. wie sich solche finden lasse, E. 362. I. II. ihre Verbindung mit dem Kegel, E. 362. III – IX. ihre Gleichung für Abscissen aus dem Mittelpunkte, 368. ihre Aehnlichkeit, unter sich, 385. und mit der Parabel, 383.

F.

Faß, von seiner Gestalt, E. 368. läßt sich wie eine abgekürzte Ellipsoide berechnen, ebendas. läßt sich als ein abgekürztes Sphäroid einer Muschellinie ansehen, E. 477.
Figurirte Zahlen, 727.

Flächen, wie sie durch Gleichungen ausgedruckt werden, 516.
Fünfeck, wie sich seine Seite zum Halbmesser des umschriebenen Kreises verhalte, 159.
Functionen, was sie sind und ihre Eintheilungen, E. 323. wie sie durch unendliche Reihen ausgedrückt werden, 624.

G.

Geometrische Aufgaben, 153.
Geordnete Grössen, 2.
Gleichung, 52. Glieder derselben, ebendas. wie sich solche wegschaffen lassen, 282. wie sich fehlende suppliren lassen, 281. einfache, 58. höhere, 72. deren Ursprung, 219. bestimmte, 70. reine und unreine, 73. gleichartige, 529. Gleichung für eine Linie, 335.
Geschlechte krummer Linien, 467.
Grade Linien, ihre Gleichung, 340.

H.

Halbmesser der Krümmung, E. 477. 504.
Hyperbel, ihre Gleichung, 389. wie sich solche finden läßt, E. 389. I – IV. ihre Gleichung für Abscissen aus dem Mittelpunkt, 402. für Coordinaten auf der kleinen Axe, E. 434. für Coord. auf der Asymptote, 412. entgegengesetzte Hyperbeln, 404. rechtwinklichte, 418. und gleichseitige, 417.

J.

Inhalt der Vierecke ist durch die beide Diagonalen und deren Durchschnittswinkel gegeben, E. II. Forts. ingleichem durch die vier Seiten, wenn solche in einem Kreis liegen, E. I. Forts.
Interusurienrechnung, E. I. Forts.

K.

Kegel, Gleichung für den senkrechten, 547.
Kegelförmige Bewegung, 540.
Knoten, was er sei, E. 483. eine Gleichung für ihn, 483. seine Breite, E. 483. eine Tangente an ihm, ebendas.
Krümmung, doppelte, 570.
Krümmungskreis, E. 477. 504.

L.

Linien, algebraische, 467. Transcendentische, 574. die von der zwoten Ordnung, 419. dergleichen sind die Parabel, Ellipse und Hyperbel, 421. und ausserdem keine, 464. sie werden von einer graden Linie höchstens in zween Pkten durchschnitten, 426. von einer der zwoten Ordnung höchstens in vier, 429. sind durch fünf Punkte gegeben, 427.
Legatum annuum, der größte Werth desselben, E. I. und II. Forts.
Leibrentenrechnung, E. II. Forts.

Locus planus, solidus, linearis, 498.
Logarithmische Linie, E. 576.
Lotto di Genua, E. I. Fort.

M.

Mittelpunkt, der Ellipse, 365. der Hyperbel, 400.
Modi der Syllogismen, 744.
Muschellinie, ihre Entstehungsart, 477. ihre Gleichung, 479.

N.

Newtonische Parallelogramm, 602.
Numerus pariter impar, 255.

O.

Ordinate, 331.
Ordinatenwinkel, ebendas.
Ordnung der Linien, 467.
Ort, ein geometrischer, 497. u. E. 497.

P.

Pactum antichreticum, E. I. Forts.
Parabel, ihre Gleichung, 349. wie man sie finde, E. 349. I – III. ihre Verbindung mit dem Kegel, E. 349. IV – VI. sind alle einander ähnlich, 389.
Parameter, der Parabel, E. 349. II. der Ellipse, E. 362. II. der Hyperbel, E. 389. II.

Potenz,

Potenz, der Hyperbel, 413. eines Produkts, 20. allgemeiner Ausdruck für jede, 141. und für ihre Unterschiede, 310.
Problema deliacum, 508.
Proiection einer krummen Linie, 520. orthographische, ebendas.
Punkt, ein doppelter, 489. dreifacher, 490. vielfacher, 493.

Q.

Quadratzahlen, ihr Unterschied, 39. Tafeln davon, 49.
Quadratur, der Parabel, E. 349. der Radlinie, E. 610. des Kreises, 621.
Quarta Falcidia, E. I. und II. Forts.

R.

Radlinie, ihre Entstehungsart, 597. ihre Gleichung, 610. Was bei ihr der beschreibende Kreis und die Grundlinie heißt, 602.
Rectification des Kreises, 621.
Reihe, was sie sei, 9. ihre Gestalt, 628. unendliche, 14. 107. convergirende und divergirende, 11. Glieder derselben, 1. steigende und fallende, 2. ein allgemeines, 9. eine arithmetische, 80. geometrische, 96. der Reihen Summe, 10, 107. 108. ihre Ergänzung, 11.
Runde Körper S. Sphäroiden.

S. Schei-

S.

Scheitel, der Parabel, 354. der Ellipse, 363. der Hyperbel, 392.
Sehne, des Unterschieds, 163. der Summe, 164. des halben Bogens, 165. des doppelten, 166. Sinus des vielfachen, 175.
Sphäroid, was es sei, 545. allgemeine Gleichung dazu, 546. insbesondere für das parabolische, elliptische und hyperbolische, 548.
Subtangente der logarithmischen Linie zeigt die Bevölkerung in einem Staate, E. 576.
Spirallinie, 578.

T.

Tangente des halben Bogens, 170. was solche in Beziehung auf eine krumme Linie bedeute, 449.
Theilung eines Winkels in drei gleiche Theile, 508. führt auf eine cubische Gleichung, 509.
Trapez, das in einen Kreis paßt, wie dieses Kreises Halbmesser durch seine Seiten bestimmt wird, E. I. Forts.
Triangularzahl, 749.

U.

Umkehrung der Reihen, 690.
Unmögliche Grössen, 34. E. 18.

V.

Veränderliche Grössen, 322.
Verdoppelung des Würfels, 508.
Versetzungen der Dinge, 51.

W.

Winkelbewegung, 590.
Wurzel einer Gleichung, 74. unmögliche, 215. irrationale, 228. wie sie sich verändern lassen, 273. sie durch Versuche zu finden, 294. durch Näherung, 304.
Wurzelgleichungen, 215.
Wurzelgrössen, 18.

Z.

Zusammengesetzte Grösse, 1.
Zehneck, Verhältnis seiner Seite zum Halbmesser des umschriebenen Kreises, 156.

Druck-

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian von, 1757-1834

Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Größen

Bd.: [2]

Mannheim 1777

Math.p. 281-1/2#Beibd.1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137673-7
VD18 90063473